This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

1837
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
FROM THE LIBRARY OF
PROFESSOR W. W. BEMAN
AB. 1870; AM. 1873
TEACHER OF MATHEMATICS
1871-1922

Math. L.D.
QA
529
P647
1875

MANUALI HOEPLI

GEOMETRIA METRICA

E TRIGONOMETRIA

PER

SALVATORE PINCHERLE

Prof. di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Bologna.

CON 47 INCISIONI NEL TESTO

QUARTA EDIZIONE

ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAIO DELLA REAL CASA

MILANO

1895

PROPRIETÀ LETTERARIA.

W. W. Berman
of.
6-23-1923

MILANO – TIP. LOMBARDI
7, FIORI OSCURI 7.

INDICE

INTRODUZIONE . . . . . Pag. 1

PARTE PRIMA

Geometria Piana.

Capitolo I. *Le figure rettilinee.*

Paragr. Pag.

I. Misura degli angoli 11
II. Misura delle aree. 13
III. Relazioni fra i vari elementi di un triangolo . 22
IV. I poligoni regolari 24

Capitolo II. *Ciclometria.*

V. Considerazioni sui limiti. 35
VI. Misure nel cerchio 38

PARTE SECONDA

Geometria Solida.

Capitolo I. *Le figure poliedriche.*

VII. Misura degli angoli diedri 47
VIII. Misura del prisma 48
IX. Misura della piramide 56

Capitolo II. *I corpi rotondi.*

X. Misure del cilindro e del cono 67
XI. Misure relative alla sfera 75

428069

PARTE TERZA

Trigonometria.

Sezione I. *Le funzioni goniometriche.*

Paragr. Pag.

I. Oggetto della Trigonometria. 89
II. Determinazione della posizione di un punto mediante numeri 90
III. Definizione delle funzioni goniometriche . . 92
IV. Angoli ed archi complementari e supplementari 99
V. Variazione delle funzioni goniometriche. . . 101
VI. Archi aventi una stessa linea trigonometrica 106
VII. Relazioni fra le sei funzioni goniometriche . 108
VIII. Teorema d'Addizione per le funzioni goniometriche 112
IX. Formole per la moltiplicazione degli angoli . 119
X. Formole per la bisezione degli angoli . . . 121
XI. Cenno sulla disposizione e l'uso delle tavole trigonometriche 125
XII. Funzioni trigonometriche di alcuni angoli. . 128

Sezione II. *La risoluzione dei triangoli.*

XIII. Relazioni fra gli elementi di un triangolo rettangolo 134
XIV. Relazioni fra gli elementi di un triangolo qualunque. 136
XV. Risoluzione dei triangoli rettangoli. 142
XVI. Risoluzione dei triangoli obliquangoli. . . . 145
XVII. Area del triangolo 156

INTRODUZIONE

I. Quando abbiamo sott'occhio vari oggetti e fissiamo la nostra attenzione su quelli che ammettono una determinata proprietà, diciamo che essi appartengono ad una medesima specie (o sono *omogenei*) rispetto alla proprietà che si è presa in considerazione e fatta astrazione da tutte le altre che i detti oggetti possono ammettere; diciamo pure che gli oggetti cui quella proprietà non appartiene sono *eterogenei* coi primi. Se la proprietà presa in esame è suscettibile di *più* e di *meno*, considerandola astrattamente essa si dirà una *grandezza;* se poi, date due grandezze di quella specie, è possibile definire per esse sia teoricamente, sia sperimentalmente l'*eguaglianza* e l'*addizione;* e se una di esse si può ripetere tante volte da raggiungere o superare l'altra, esse si diranno *misurabili*. Prima di definire in modo generale che cosa sia il *misurare*, ci sembra opportuno chiarirne il concetto con un esempio.

Dati diversi oggetti, possiamo considerare in essi ad esclusione delle altre proprietà, quella di essere *pesanti*. A questo vocabolo non vogliamo annettere nulla più del significato volgare; diciamo cioè *pesante* un oggetto capace di agire

sulla bilancia. Questa qualità astrattamente considerata verrà detta *peso;* ed essendo evidentemente suscettibile di *più* e di *meno*, diremo che il peso è una grandezza. L'*eguaglianza* di due pesi si definirà sperimentalmente chiamando egualmente pesanti due oggetti che posti nei due piatti della bilancia si fanno equilibrio; e se due oggetti pesanti B e C fanno insieme equilibrio all'oggetto pesante A, si dirà che il peso di A è la somma dei pesi di B e di C, e si scriverà:

$$\text{Peso di } A = \text{Peso di } B + \text{Peso di } C. \qquad (1)$$

Ciò posto, dati due oggetti pesanti A ed E e supposto di poter fare i confronti con istrumenti teoricamente perfetti, può darsi:

a) che il peso di A faccia equilibrio al peso di 2, di 3,... o di n oggetti che pesano come E, e scriveremo

$$\text{Peso di } A = 2, 3, \ldots\ n \text{ volte il peso di } E \qquad (2)$$

o più brevemente

$$A = 2\,E,\ 3\,E, \ldots\ n\ E;$$

b) che m oggetti che pesano come A facciano equilibrio ad n oggetti che pesano come E, ossia

$$m \text{ volte il peso di } A = n \text{ volte il peso di } E \qquad (3)$$

o più brevemente

$$m\,A = n\,E;$$

c) o finalmente che non esistano due numeri interi soddisfacenti all'eguaglianza prece-

dente; in tale caso però si potranno sempre trovare due serie indefinite di numeri interi crescenti

$$m_1, m_2, m_3, \ldots \text{ ed } n_1, n_2, n_3, \ldots$$

tali che

$$\left.\begin{array}{l} m_1 A > n_1 E > (m_1 - 1) A, \\ m_2 A > n_2 E > (m_2 - 1) A, \\ m_3 A > n_3 E > (m_3 - 1) A, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Nel caso *a*) si dirà che il peso A è *misurato* dal numero intero 2, 3,... n rispetto all'*unità* di peso E; nel secondo caso *b*) che il peso A è misurato dal numero frazionario $\frac{n}{m}$ rispetto alla stessa unità; nel terzo caso *c*) si dirà che la misura del peso A rispetto all'unità E è il numero incommensurabile definito dalla successione di frazioni $\frac{n_1}{m_1}, \frac{n_2}{m_2}, \frac{n_3}{m_3} \ldots$ (1).

Le considerazioni precedenti si possono ripetere per due grandezze omogenee di qualunque specie, purchè una di esse si possa ripetere tante volte da raggiungere o superare l'altra; infatti tali considerazioni fondansi unicamente sulle eguaglianze (1) a (3); e stabilite queste, le conse-

(1) Supponiamo nota al lettore la teoria dei numeri incommensurabili: si può consultare in proposito il Capitolo XII del *Trattato d'Algebra Elementare* del prof. C. Arzelà (Firenze, Lemonnier, 1880) o il Cap. II del mio *Manuale d'Analisi Algebrica* (Milano, Hoepli, 1893).

guenze che se ne deducono divengono indipendenti dalla specie della grandezza considerata. Ai pesi potremmo dunque sostituire, per es., segmenti di retta od angoli, grandezze per le quali valgono le proprietà indicate.

DEFINIZIONE 1. Se per le grandezze A, B,.. di una data specie si è potuto definire in qualunque modo l'*eguaglianza* e l'*addizione*, e se una qualunque di esse A si può ripetere tante volte da raggiungere o superare un'altra B; se poi si sceglie una grandezza E della specie come *unità*, qualunque altra delle grandezze, per esempio la A, si potrà confrontare colla E. Se dal confronto risulta:

$$A = n\,E, \text{ (1)} \qquad (a)$$

od

$$m\,A = n\,E, \qquad (b)$$

od infine

$$\left.\begin{array}{l} m_1 A > n_1 E > (m_1 - 1) A \\ m_2 A > n_2 E > (m_2 - 1) A \\ m_3 A > n_3 E > (m_3 - 1) A \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (c)$$

dove m_1, m_2, m_3... n_1, n_2, n_3... sono numeri interi crescenti, si dirà rispettivamente:

a) che, rispetto all'unità E, la grandezza A è misurata dal numero intero n;

b) che essa è misurata dal numero frazionario $\frac{n}{m}$;

c) che essa è misurata dal numero incommensurabile α definito come limite della successione di frazioni

$$\frac{n_1}{m_1}, \quad \frac{n_2}{m_2}, \quad \frac{n_3}{m_3}, \ldots$$

(1) Colle minuscole m, n affette o no da indici, intenderemo sempre numeri interi.

II. La misura come è stata testè definita non differisce dal *rapporto* fra A ed E, quale l'abbiamo definito nel *Manuale di Geometria pura*, § XI. Nel caso che la misura sia in un numero intero o frazionario, l'identità dei due concetti risulta evidente, nel caso che la misura sia un numero incommensurabile α, questo numero soddisfa ancora alla definizione data di *rapporto*, poichè secondo che $m E$ sarà maggiore o minore di $n A$, anche $\frac{m}{n}$ sarà maggiore o minore di α.

III. Siano A e B due grandezze omogenee ed a, b i numeri che le misurano rispetto all'unità E; se prendiamo di A e B le molteplici $m A$ ed $n B$, evidentemente queste avranno per misura i numeri $m a$ ed $n b$. Se ora fra le molteplici delle grandezze A e B passa la relazione

$$m A > n B$$

si avrà anche per i numeri che le misurano

$$m a > n b$$

onde

$$\frac{a}{b} > \frac{n}{m};$$

similmente se per le grandezze si avesse

$$m A \leqq n B$$

ne risulterebbe per i numeri

$$m a \leqq n b,$$

onde

$$\frac{a}{b} \leqq \frac{n}{m}$$

talchè il quoziente $\frac{a}{b}$ soddisfa alle condizioni poste nel § XI del *Manuale di Geometria pura* come definizione del rapporto delle grandezze A e B. Si può dunque enunciare:

DEFINIZIONE 2. Misura di una grandezza è il rapporto di questa alla sua unità.

OSSERVAZIONE 1. Il rapporto di due grandezze coincide col numero che misura la prima di esse quando la seconda si prende per unità.

2. Il rapporto di due grandezze coincide col quoziente dei numeri che esprimono la misura delle due grandezze misurate con una stessa unità.

L'unità delle grandezze d'una determinata specie si può scegliere arbitrariamente; per gli usi pratici, si cerca che essa sia comunemente accettata e facilmente ritrovabile; nelle ricerche teoriche, pur ricordandone l'arbitrarietà, essa si mantiene ordinariamente invariabile in tutto il corso d'una data questione.

IV. In ciò che segue e senza che sia necessario avvertirlo ulteriormente sostituiremo alle grandezze concrete i numeri che le misurano; così con *segmento* intenderemo il numero che misura il segmento rettilineo rispetto ad una convenuta unità lineare, con *angolo* il numero che misura l'angolo rispetto ad una convenuta unità angolare, con *area* il numero che misura

una superficie, e così via. Mediante questa convenzione ci potremo servire delle locuzioni abbreviate di *prodotto, quoziente*, ecc., di *linee, angoli, aree,* intendendo con ciò il prodotto, quoziente, ecc., dei numeri che le misurano; in particolare se colle stesse lettere A, B denotiamo ad un tempo le grandezze ed i numeri che le misurano, al rapporto $A : B$ delle grandezze si potrà sostituire il quoziente $\frac{A}{B}$ dei numeri. La sostituzione dei numeri alle grandezze ci pone in grado di tradurre vari teoremi della geometria in relazioni numeriche e di applicare quindi i procedimenti dell'aritmetica o dell'algebra alle questioni geometriche.

PARTE PRIMA

GEOMETRIA PIANA

CAPITOLO PRIMO

Le figure rettilinee.

§ I. Misura degli angoli.

TEOREMA I. In uno stesso cerchio od in due cerchi eguali gli angoli al centro $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ stanno fra loro come gli archi su cui insistono.

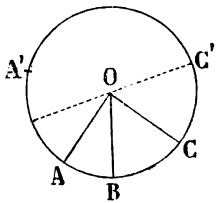

Fig. 1.

Preso infatti l'arco BA' molteplice di BA secondo qualunque numero, 3 per esempio, e l'arco BC' molteplice di BC secondo qualunque altro numero, 2 per esempio, anche gli angoli $A'OB$, $C'OB$ saranno rispettivamente molteplici di AOB,

COB secondo i numeri 3 e 2 [1]. Ora secondo che *BA'* è maggiore di *BC'*, o eguale, o minore, anche *BOA'* sarà corrispondentemente maggiore di *BOC'*, o eguale, o minore e quindi [2] si potrà scrivere la proporzione

$$\widehat{BOA} : \widehat{BOC} = \text{arco } AB : \text{arco } BC,$$

c. d. d.

Osservazione. Si può prendere per unità di angolo l'angolo retto; se allora, come unità d'arco, si assume quell'arco che corrisponde all'angolo al centro retto, cioè il quarto di circonferenza o *quadrante*, in forza del teorema precedente il numero che dà la misura dell'angolo dà pure la misura dell'arco intercetto sopra una circonferenza qualunque avente il centro nel vertice dell'angolo. Nella pratica si suole considerare la circonferenza (qualunque sia il suo raggio) come divisa in 360 parti eguali, dette *gradi;* ogni grado si suddivide in 60 *minuti primi*, ogni minuto primo in 60 *minuti secondi.* Se si prende per unità d'angolo l'angolo al centro che insiste sull'arco di un grado, un arco e l'angolo al centro che insiste su di esso saranno misurati dallo stesso numero di gradi, minuti e secondi. Per es., 90 gradi (che si scrive 90°) esprimerà tanto la misura del quadrante quanto dell'angolo retto.

---

(1) *Geometria pura,* § X, teor. 1. D'ora innanzi richiameremo il *Manuale di Geometria pura* colle iniziali *G. P.* poste davanti al numero del paragrafo.

(2) *G. P.* § XI, def. 2.

L'osservazione precedente si enuncia talvolta in modo spedito, ma poco preciso, dicendo:

A) l'angolo al centro ha per misura l'arco su cui insiste.

Usando lo stesso linguaggio, e ricordando le proposizioni 2 e 5 del § X della *Geometria pura*, si possono pure enunciare i seguenti teoremi:

B) L'angolo alla circonferenza ha per misura la metà dell'arco su cui insiste.

C) L'angolo compreso fra una tangente ed una corda ha per misura la metà dell'arco interno sotteso dalla corda.

§ II. Misura delle Aree.

TEOREMA 1. Il rapporto di due rettangoli $ABCD$, $AEFG$ è uguale al rapporto delle loro basi moltiplicato per il rapporto delle altezze.

Si dispongano i rettangoli in modo che abbiano un angolo A comune, e si prolunghi GO in H; i rettangoli $AEFG$, $AGBH$ avendo la stessa altezza stanno fra loro come le basi [1] e si ha

$$AGBH : AEFG = AB : AE$$

ma a questi rapporti di grandezze si possono, per quanto si è detto nell'*Introduzione*, sostituire [2] i quozienti dei numeri che le misurano rispetto

[1] *G. P.*, § XII, teor. 1, coroll.
[2] Introd. III e IV.

ad unità convenute; onde si potrà scrivere:

$$\frac{AGBH}{AEFG} = \frac{AB}{AE} \qquad (1)$$

intendendo che quest'ultima è una relazione *fra numeri.*

Similmente i rettangoli *AGBH*, *ABCD* avendo

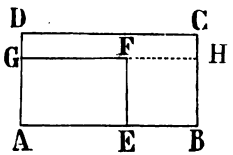

Fig. 2.

la stessa altezza *AB* dànno la relazione (fra numeri):

$$\frac{ABCD}{AGBH} = \frac{AD}{AG} \qquad (2)$$

e moltiplicando membro a membro le eguaglianze (1) e (2)

$$\frac{ABCD}{AEFG} = \frac{AB}{AE} \times \frac{AD}{AG} \qquad (3)$$

c. d. d.

TEOREMA 2. Il numero che misura l'area di un rettangolo è il prodotto del numero che misura la base per il numero che misura l'altezza, supposto che l'unità di area sia il quadrato avente per lato l'unità lineare.

Se infatti nella figura precedente si suppone $AE = AG$ e si fa AE eguale all'unità lineare; se inoltre si conviene che il quadrato $AEFG$ costruito sull'unità lineare sia preso come unità di superficie, allora

$$\frac{ABCD}{AEFG}$$

sarà [1] il numero che misura $ABCD$ ed

$$\frac{AB}{AE}, \frac{AD}{AG}$$

saranno i numeri che misurano AB, AD; onde la formola (3) del teorema precedente dimostra la proposizione enunciata.

Osservazione I. Questo teorema si suole enunciare nel modo seguente, meno preciso ma più spedito:

L'area del rettangolo è misurata dal prodotto della base per l'altezza.

Si può anche esprimere lo stesso enunciato colla formola:

$$ABCD = AB \times AD.$$

Se il rettangolo ha la base eguale all'altezza, cioè se è un quadrato, $AB = AD$ e la formola precedente diviene

$$ABCD = \overline{AB}^2$$

che si enuncia:

---

[1] Introd., III e IV.

L'area del quadrato è misurata dalla seconda potenza (detta perciò *quadrato*) del suo lato.

Osservazione II. Sostituendo a quattro segmenti A, B, C, D, in proporzione, i numeri che li misurano, si può dalla formola $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ dedurre colle regole dell'algebra $A \times D = B \times C$; ed interpretando questa formola per mezzo del teorema precedente, si può dire:

« Se quattro segmenti sono in proporzione, il rettangolo costruito sugli estremi è equivalente al rettangolo costruito sui medî. »

E così:

« Se tre segmenti sono in proporzione continua, il quadrato costruito sulla media proporzionale è equivalente al rettangolo degli estremi. »

III. Se a è il numero che misura l'ipotenusa e b, c sono i numeri che misurano i due cateti di un triangolo rettangolo, si avrà fra questi tre numeri la relazione

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

IV. Se AB è una retta divisa in qualunque

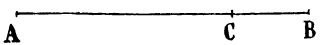

Fig. 3.

modo in C ed indichiamo con a, b, c, i numeri che misurano rispettivamente i segmenti AB,

AC, CB, si ha:

$$a = b + c$$

onde quadrando colle regole dell'Algebra:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2 \times b \times c;$$

ma a^2, b^2, c^2, $b \times c$ esprimendo per il teorema precedente le misure di aree, la presente formola ci dà il teorema dimostrato direttamente nel *Manuale di Geometria pura* (§ VI, teor. 9):

« Se una retta è divisa in due parti qualunque, il quadrato costruito su tutta la retta è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sulle parti, più il rettangolo contenuto dalle due parti. »

Anche altre analoghe formole di calcolo algebrico sono suscettibili di dimostrazione puramente geometrica come si può vedere nel libro II degli *Elementi d'Euclide*.

V. Si noti che il teorema 2 (come pure i seguenti) non esprime una verità assoluta, ma è subordinato alla convenzione che ad unità di superficie sia scelto il quadrato costruito sull'unità lineare. Questa convenzione che si fa pure nel nostro Sistema Metrico legale, non è per nulla necessaria; ma modificandola si dovrebbe modificare corrispondentemente l'enunciato del teorema precedente.

TEOREMA 3. L'area del parallelogrammo è misurata dal prodotto dei numeri che ne misurano la base e l'altezza.

Sappiamo infatti [1] che un parallelogrammo è

(1) *G. P.*, § VI, teor. 4.

equivalente al rettangolo che abbia eguale base ed eguale altezza.

TEOREMA 4. L'area del triangolo è misurata dalla metà del prodotto dei numeri che ne misurano la base e l'altezza.

Sappiamo infatti [1] che un triangolo è la metà del parallelogrammo avente eguale base ed eguale altezza.

OSSERVAZIONE I. Se indichiamo con S l'area di un triangolo, con a, b, c i tre lati e con a', b', c' le rispettive altezze, si ha

$$S = \frac{1}{2} a a' = \frac{1}{2} b b' = \frac{1}{2} c c'$$

onde

$$a' = \frac{2 S}{a}, \quad b' = \frac{2 S}{b}, \quad c' = \frac{2 S}{c}$$

ossia i lati di un triangolo sono inversamente proporzionali alle altezze corrispondenti.

II. Il teorema precedente ci permette di misurare l'area di un poligono qualsiasi, poichè qualunque poligono (convesso o no) si può per mezzo di diagonali ricondurre a somma o differenza di triangoli.

TEOREMA 5. L'area del trapezio $ABCD$ è misurata dalla metà del prodotto dell'altezza DH per la somma $AB + CD$ delle basi parallele.

Si divida per metà il lato CB in E e si congiunga DE che sega AB in G. I triangoli DCE

(1) G. *P.*, § VI, teor. 5.

BGE sono eguali come aventi $CE = BE$, gli angoli in E opposti al vertice ed $\widehat{ECD} = \widehat{EBG}$ come alterni interni; il trapezio $ABCD$ sarà dunque

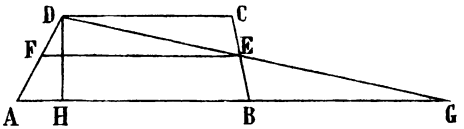

Fig. 4.

equivalente al triangolo ADG, e sarà $BG = DC$. Ma [1]

$$\text{area } ADG = \frac{1}{2} DH \times AG$$

ed

$$AG = AB + BG = AB + CD$$

onde

$$\text{area } ABCD = \frac{1}{2} DH (AB + CD)$$

c. d. d.

Osservazione. Se EF è la retta che unisce i punti di mezzo dei lati non paralleli, si ha ancora

$$\text{area } ABCD = DH \times EF;$$

infatti per la similitudine dei triangoli DEF, DGA la EF è la metà della AG, ossia di $AB + CD$.

---

[1] Teor. 1.

TEOREMA 6. Le aree di due poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.

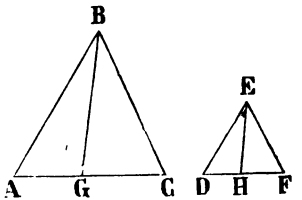

Fig. 5.

a) Abbiansi dapprima i triangoli simili ABC, DEF e si abbassino le altezze omologhe BG, EH. Si avrà [1]

$$ABC = \frac{1}{2} AC \times BG, \qquad DEF = \frac{1}{2} DF \times EH$$

onde

$$\frac{ABC}{DEF} = \frac{AC}{DF} \times \frac{BG}{EH},$$

ma i triangoli ABG, DEH sono simili come equiangoli perchè $\widehat{A} = \widehat{D}$ per ipotesi e $\widehat{G} = \widehat{H}$ come retti, onde

$$\frac{BG}{EH} = \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

e quindi

$$\frac{ABC}{DEF} = \frac{AC}{DF} \times \frac{AC}{DF} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{DF}^2}.$$

(1) Teor. 4

b) Abbiansi ora due poligoni simili *ABCDE*, *abcde*; essi si possono scomporre in eguale nu-

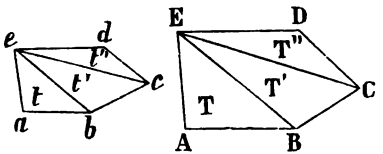

Fig. 6.

mero di triangoli simili T e t, T' e t', T'' e t'' (1). Per quanto si è dimostrato dianzi

$$\frac{T}{t}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2},\quad \frac{T'}{t'}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{bc}^2},\quad \frac{T''}{t''}=\frac{\overline{CD}^2}{\overline{cd}^2},$$

ma per ipotesi

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd},$$

onde

$$\frac{T}{t}=\frac{T'}{t'}=\frac{T''}{t''}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2},$$

e poichè in una serie di rapporti eguali la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come uno degli antecedenti al suo conseguente (2),

(1) *G P.*, § XII, teor. 5.

(2) V. *Algebra Elementare* nella raccolta dei *Manuali Hoepli*, pag. 68.

verrà

$$\frac{T+T'+T''}{t+t'+t''}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2}$$

ossia

$$\frac{ABCDE}{abcde}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2},$$

c. d. d.

§ III. Relazioni fra gli Elementi di un Triangolo.

Definizione. *Projezione* di un segmento rettilineo AB sopra una retta è la porzione di questa retta intercetta fra le perpendicolari abbassate ad essa dagli estremi A e B del segmento.

Teorema 1. In un triangolo ABC il quadrato di un lato

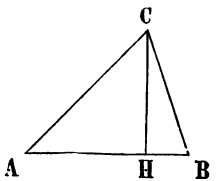

Fig. 7.

BC opposto ad un angolo acuto A è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati AB, AC, meno il doppio prodotto di uno di questi lati AB per la proiezione AH dell'altro su di esso.

Nel triangolo CBH si ha per il teorema di

Pitagora

$$\overline{CB}^2 = \overline{HB}^2 + \overline{CH}^2 \qquad (1)$$

ma nel triangolo CHA si ha per lo stesso teorema

$$\overline{CH}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AH}^2 \qquad (2)$$

ed essendo $HB = AB - AH$, viene quadrando [1]

$$\overline{HB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AH}^2 - 2\,AB \times AH; \qquad (3)$$

e sostituendo per $\overline{HB}^2$, $\overline{CH}^2$ i loro valori (3) e (2) nella (1) e riducendo:

$$\overline{CB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,AB \times AH,$$

c. d. d.

Teorema 2. In un triangolo ABC ottusangolo il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso A è uguale alla

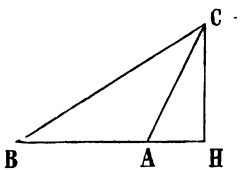

Fig. 8.

somma dei quadrati degli altri due lati AB, AC, più il doppio prodotto di uno di questi lati AB per la proiezione AH dell'altro su di esso.

---

[1] § II, teor. 2, osservaz. IV.

Dal triangolo rettangolo HBC si ha

$$\overline{CB}^2 = \overline{HB}^2 + \overline{CH}^2, \qquad (1)$$

ma dal triangolo rettangolo CAH,

$$\overline{CH}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AH}^2 \qquad (2)$$

ed essendo $HB = AH + AB$, viene [1]

$$\overline{HB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{AB}^2 + 2\,AH \times AB \qquad (3)$$

onde sostituendo nella (1) ad HB e CH i loro valori (3) e (2) e riducendo

$$\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\,AH \times AB$$

c. d. d.

§ IV. I Poligoni regolari.

Definizione 1. Un poligono equiangolo ed equilatero si dice *regolare.*

Per esempio sono poligoni regolari il triangolo equilatero ed il quadrato.

Teorema 1. Ogni poligono regolare ammette un cerchio circoscritto ed un cerchio inscritto [1] fra loro concentrici.

a) Sia il poligono regolare $ABCDE$ (fig. 9): si seghino per metà gli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ e sia O il punto d'incontro delle bisettrici; si congiunga OA, OD, OE.

---

[1] *G. P.*, § IX, defin. 2 e 3.

I triangoli DOC, BOC avendo CO comune $CD = BC$ per ipotesi, e $\widehat{BCO} = \widehat{OCD}$ per costruzione, sono eguali [1] e sarà $\widehat{CDO} = \widehat{CBO}$; ma

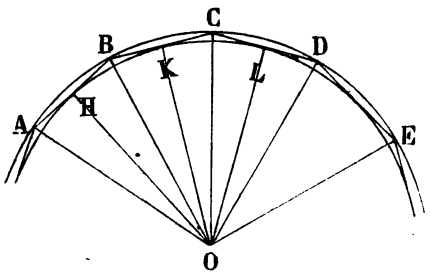

Fig. 9.

$\widehat{CBO}$ è la metà di $\widehat{ABC}$ angolo del poligono regolare ed eguale a $\widehat{CDE}$, dunque $\widehat{CDO}$ sarà la metà di $\widehat{CDE}$ ed OD sarà la bisettrice dell'angolo in D. Similmente si dimostrerebbe che tutte le rette che giungono in O dai vertici del poligono ne bisecano gli angoli. Essendo pertanto

$$\widehat{BAO} = \widehat{ABO} = \widehat{CBO} = \widehat{BCO} = \ldots$$

come metà d'angoli eguali, ne segue che i triangoli ABO, BCO, CDO,... sono isosceli [2] e

$$AO = BO = CO = DO = \ldots$$

---

(1) *G. P.*, § II, teor. 1.
(2) *G. P.*, § II, teor. 4.

e quindi il cerchio di centro O e di raggio OA passa per tutti i vertici, ossia è circoscritto al poligono.

b) Da O si abbassino le perpendicolari OH, OK, OL,... ai lati del poligono e si osservi che esse divideranno le corde AB, BC, CD,... per metà (1). I triangoli BOH, BOK avendo BO comune, $\widehat{OBH} = \widehat{OBK}$ come si è dimostrato precedentemente, ed $\widehat{H} = \widehat{K}$ come retti sono eguali e sarà $OH = OK$; similmente si dimostrerebbe $OK = OL$, ecc., e quindi il cerchio di centro O e di raggio OH sarà tangente a tutti i lati (cui le OH, OK,... sono perpendicolari) nel loro punto di mezzo, e sarà inscritto al poligono.

Definizione 2. Il centro comune dei due cerchi inscritto e circoscritto ad un poligono regolare, dicesi *centro* del poligono; il raggio del cerchio circoscritto dicesi *raggio* ed il raggio del cerchio inscritto dicesi *apotema* del poligono regolare.

Teorema 2. Se una circonferenza è divisa in n archi eguali dagli n punti A, B, C, D..., congiungendo i punti di divisione consecutivi si forma un poligono regolare inscritto nel cerchio, e conducendo nei punti di divisione le tangenti fino ai loro piu prossimi incontri si forma un poligono regolare circoscritto al cerchio.

a) Il poligono inscritto $ABCDEF$ è regolare: infatti i lati AB, BC, CD,... sono eguali come corde corrispondenti ad archi eguali (2)

(1) *G. P.*, § VII, teor. 2.
(2) *G. P.*, § X, teor. 1.

cioè il poligono è equilatero; e gli angoli

$$\widehat{FAB},\ \widehat{ABC},...$$

essendo angoli alla circonferenza che insistono

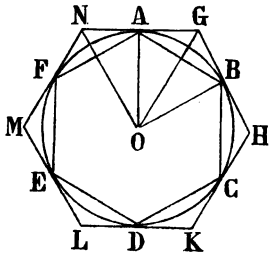

Fig. 10.

su archi eguali sono eguali [1], talchè il poligono è equiangolo.

b) Il poligono circoscritto *GHKL*... è pure regolare. Infatti gli angoli

$$\widehat{NAF},\ \widehat{NFA},\ \widehat{GAB},\ \widehat{GBA},\ \widehat{HBC},...$$

sono tutti eguali come angoli che sono formati ciascuno da una tangente ed una corda e che comprendono archi eguali [2]; adunque i triangoli *NAF*, *ABG*, *HBC*,... avendo eguali basi ed eguali gli angoli alle basi sono isosceli ed eguali,

---

(1) § I, osservaz. *B*).
(2) § I, osservaz. *C*).

pertanto $\widehat{FNA} = \widehat{AGB} = \widehat{BHC} = \ldots$ ed il poligono è equiangolo; di più

$$NF = AN = AG = GB = \ldots$$

ossia il poligono è equilatero, c. d. d.

Osservazione I. Da questa proposizione risulta che il problema di inscrivere o circoscrivere il poligono regolare di n lati in una data circonferenza coincide col problema della divisione della circonferenza in n parti eguali.

II. Poichè sappiamo dividere un dato arco per metà [1], se abbiamo una circonferenza divisa in n parti eguali, sapremo dividerla in $2n$, e quindi in $4n$, in $8n$,... parti eguali: ossia sapendo inscrivere (o circoscrivere) in un cerchio il poligono regolare di n lati se ne potranno ottenere i poligoni regolari inscritti e circoscritti di $2n$, $4n$, $8n$,... lati.

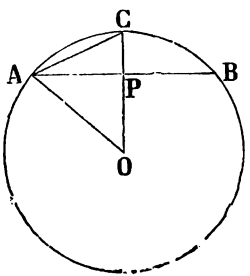

Fig. 11.

III. Dato il lato $AB = a$ del poligono rego-

(1) *G. P.*, § X, teor. 1, coroll.

lare di n lati inscritto nel cerchio di raggio dato R, si può calcolare il lato $AC = x$ del poligono regolare inscritto di $2n$ lati. Unendo infatti OC, questa retta risulterà perpendicolare ad AB e la dividerà per metà [1], onde

$$\overline{AO}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PO}^2$$

ossia

$$R^2 = \frac{a^2}{4} + \overline{PO}^2$$

da cui

$$PO = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$$

ma

$$CP = CO - PO = R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$$

e dal triangolo ACP

$$\overline{AC}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2;$$

sostituendo ad AP, CP i loro valori e riducendo:

$$x = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}\right)}.$$

Questa formola permette di calcolare successivamente i lati dei poligoni regolari di $2n$, $4n$, $8n$,... lati inscritti in un dato cerchio quando si conosca il lato del poligono inscritto di n lati.

---

(1) *G. P.*, § X, ibid.

TEOREMA 3. *a*) Due poligoni regolari $ABCD...$, $A'B'C'D'...$, di egual numero n di lati sono simili;

b) i loro perimetri sono fra loro come i raggi OB, $O'B'$ o come le apoteme OM, $O'M'$;

c) le loro aree sono fra loro come i quadrati dei raggi o delle apoteme.

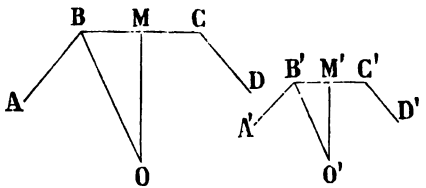

Fig. 12.

a) I due poligoni sono equiangoli. Infatti la somma degli angoli interni in un poligono convesso di n lati è data da $2n-4$ angoli retti; ma se il poligono è regolare, essendo gli n angoli eguali, ognuno di essi vale $\frac{2n-4}{n}$ d'angolo retto. Di più i due poligoni hanno i lati proporzionali, infatti i rapporti

$$AB : A'B', \; BC : B'C,$$

sono eguali come aventi eguali antecedenti ed eguali conseguenti. I poligoni sono dunque simili.

b) Si ha evidentemente

$$n\,AB : n\,A'B' = AB : A'B'$$

cioè i perimetri dei due poligoni stanno fra loro come i lati; ma i triangoli MOB, $M'O'B'$ sono

simili come aventi $\widehat{M} = \widehat{M'}$ perchè retti ed

$$\widehat{MBO} = \widehat{M'B'O'}$$

come metà [1] di angoli eguali, dunque

$$MO : M'O' = BO : B'O' = BM : B'M';$$

ma BM e $B'M'$ essendo rispettivamente le metà dei lati dei due poligoni regolari, hanno lo stesso rapporto dei lati, e per conseguenza dei perimetri: dunque i perimetri stanno fra loro come i raggi o come le apoteme.

c) Per il teorema 5 del § II si ha

$$\frac{\text{area } ABCD...}{\text{area } A'B'C'D'...} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C}^2},$$

ma si è trovato

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{OM}{O'M'} = \frac{OB}{O'B'},$$

onde

$$\frac{\text{area } ABCD...}{\text{area } A'B'C'D'...} = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{O'M'}^2} = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{O'B'}^2},$$

c. d. d.

TEOREMA 4. L'area di un poligono regolare è misurata dalla metà del prodotto del perimetro per l'apotema.

Se si congiunge il centro del poligono con tutti

---

(1) Teor. 1.

i vertici, si formeranno tanti triangoli quanti sono i lati; si conducano poi le altezze di questi triangoli che saranno le apoteme del poligono. L'area di ogni triangolo è misurata dalla metà del prodotto dell'altezza per la base, cioè dalla metà del prodotto dell'apotema per il lato corrispondente del poligono regolare; l'area del poligono sarà la somma delle aree dei triangoli, cioè la metà del prodotto dell'apotema per la somma dei lati o perimetro.

Consideriamo ora alcuni poligoni speciali.

I. Quadrato. — Si divide evidentemente una circonferenza in quattro parti eguali tracciando due diametri perpendicolari, e [1] questa costruzione permette di inscrivere e circoscrivere il quadrato. Sapendo inscrivere il quadrato, in forza del corollario del teorema 2 si può inscrivere l'ottagono regolare, indi i poligoni di 16, 32,... ed in generale di 2^m lati.

Il lato a del quadrato essendo manifestamente l'ipotenusa di un triangolo rettangolo ed isoscele, il cui cateto è il raggio R del cerchio circoscritto, si avrà

$$a = R\sqrt{2}.$$

Applicando a questo valore di a la formola trovata a pag. 29 (osservazione III del teorema 2) si trova per lato x dell'ottagono

$$x = R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

[1] Teor. 2.

II. Triangolo equilatero ed Esagono. — Nella circonferenza data di centro O si adattino a partire dal punto B le corde AB, BC eguali al raggio e si conducono per A, B, C i diametri AD, BE, CF: dico che la circonferenza verrà così divisa

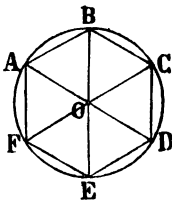

Fig. 13.

in sei parti eguali. Infatti, i triangoli AOB, BOC sono equilateri, perciò

$$\widehat{AOB},\ \widehat{BOC}$$

valgono ciascuno $\frac{2}{3}$ di angolo retto; e valgono pure $\frac{2}{3}$ di retto i loro opposti al vertice

$$\widehat{EOD},\ \widehat{EOF}:$$

ma gli angoli formati intorno al punto O valgono insieme 4 retti, dunque i rimanenti $\widehat{AOF}$, $\widehat{COD}$ valgono insieme

$$4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$$

di retto, ed essendo gli angoli $\widehat{AOF}$, $\widehat{COD}$ eguali come opposti al vertice, ognuno di essi varrà $\frac{2}{3}$ di retto. I sei angoli al centro intorno al punto O sono dunque eguali, perciò sono eguali gli archi su cui insistono, talchè la circonferenza è divisa nei punti A,B,C,D,E,F in sei parti eguali, e per conseguenza nei punti A,C,E in tre parti eguali. Si ha così il modo di inscrivere e circoscrivere ad un cerchio i poligoni regolari di 6 e 3 lati, e quindi di 12, 24, ... 3×2^m lati.

Se si congiunge EC, il triangolo BCE è rettangolo perchè ECB è nel semicerchio, quindi

$$\overline{EC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{BE}^2;$$

ora detto R il raggio, a il lato del triangolo equilatero,

$$BE = 2R, \qquad BC = R,$$

onde

$$a = \sqrt{3}\,R.$$

CAPITOLO II.

Ciclometria.

§ V. Considerazioni sui limiti [1].

Abbiasi la serie dei poligoni regolari di n, $2n$, $4n, \ldots$ lati iscritti in un cerchio, e siano indicati rispettivamente con

$$p, p', p'', p''', \ldots$$

ed

$$a, a', a'', a''', \ldots$$

i loro perimetri e le loro aree; abbiasi pure la serie dei poligoni regolari di egual numero di lati circoscritti allo stesso cerchio, e siano rispettivamente

$$P, P', P'', P''', \ldots$$

ed

$$A, A', A'', A''', \ldots$$

i loro perimetri e le loro aree. Applicando una nota proposizione della *Geometria pura* sulle lunghezze delle linee spezzate inviluppate ed in-

(1) V. il *Manuale di Analisi Algebrica* (Milano, Hoepli, 1893), Preliminari.

viluppanti [1] si ha evidentemente

$$p < p';$$

di più, per essere l'area a parte di a', si avrà pure

$$a < a'.$$

Per ragioni analoghe si avrebbe

$$P > P',$$

ed

$$A > A'.$$

Finalmente l'area ed il perimetro di uno qualunque dei poligoni inscritti essendo rispettivamente minori dell'area e del perimetro di uno qualunque dei poligoni circoscritti, si potrà formare la serie di disuguaglianze

$$p < p' < p'' < p''' < \ldots < P''' < P'' < P' < P$$

ed

$$a < a' < a'' < a''' < \ldots < A''' < A'' < A' < A.$$

Ma si intuisce come al crescere del numero dei lati la differenza fra il perimetro del poligono inscritto e del circoscritto di egual numero di lati vada sempre diminuendo e si possa ridurre piccola quanto si vuole, senza però che essa possa mai diventare nulla; e lo stesso dicasi della differenza delle aree. In altri termini, si intuisce l'esistenza di una certa lunghezza C alla quale i perimetri $p, p', p'', \ldots$ pur rimanendo sempre minori

(1) *G. P.*, § IV, teor. 4, coroll. 2.

di C, ed i perimetri $P, P', P'', \ldots$ pur mantenendosi sempre maggiori, vanno accostandosi tanto quanto si vuole, senza mai raggiungerla esattamente. E similmente si è condotti ad ammettere l'esistenza di una certa area S alla quale le aree $a, a', a'', \ldots$ mantenendosi sempre minori di S, e le aree A, $A', A'', \ldots$ mantenendosi sempre maggiori, vanno avvicinandosi indefinitamente senza mai raggiungerla esattamente.

Le considerazioni che precedono possono concretarsi nei seguenti enunciati:

DEFINIZIONE 1. **Data una serie indefinita di grandezze omogenee**

$$A_1, A_2, A_3, \ldots A_n, \ldots \qquad (1)$$

se esiste una grandezza omogenea L tale che le differenze $A_n - L$ (o $L - A_n$) possano diventare e mantenersi col crescere di n minori di qualunque quantità assegnata piccola a piacere, si dirà che la grandezza L è il *limite* cui tendono le grandezze della serie (1).

Dalle cose dette risulta che i perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti di n, $2n$, $4n, \ldots$ lati tendono ad un limite che è la lunghezza indicata con C, e le aree dei poligoni stessi ad un limite che è l'area S.

DEFINIZIONE 2. Il *limite* cui tende il perimetro di un poligono regolare inscritto o circoscritto in un dato cerchio quando si raddoppia indefinitamente il numero dei lati si chiamerà *lunghezza della circonferenza.*

3. Il limite cui tende l'area di un poligono regolare inscritto o circoscritto in un dato cerchio quando si raddoppia indefinitamente il numero dei lati si chiamerà *area del cerchio* [1].

---

[1] Mentre può sembrare a prima giunta poco naturale

PRINCIPIO SUI LIMITI. Se si hanno due serie di grandezze

$$A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$$

e

$$B_1, B_2, \ldots B_n, \ldots$$

tendenti ai limiti L ed L', e le grandezze corrispondenti nelle due serie si mantengono sempre eguali,

$$A_1 = B_1, \; A_2 = B_2, \ldots \; A_n = B_n, \ldots$$

anche i limiti L ed L' saranno eguali.

§ VI. Misure nel Cerchio.

TEOREMA 1. Due circonferenze stanno fra loro come i raggi.

Siano due circonferenze di raggi R, R' e diciamo C, C' le loro lunghezze rispettive [1]; inscriviamo in ciascuna di queste i poligoni regolari di n, $2n$, $4n, \ldots$ lati ed indichiamo con $p, p_1, p_2, \ldots$ i pe-

di definire in simile guisa la lunghezza e l'area del cerchio, grandezze il cui concetto appare intuitivo, si riflette però che è impossibile darne una definizione in termini più semplici e che non venga a contenere implicitamente qualche circolo vizioso (V. HOUEL, *Essai Critique sur les principes de la Géométrie Élémentaire*). Onde dare tutto il rigore alla presente teoria bisognerebbe dimostrare che preso un segmento e piccolo ad arbitrio si può sempre prendere r tanto grande che sia $P^{(r)} - p^{(r)} < e$; lo stesso per le aree; ed inoltre mostrare che il limite è indipendente dal numero n di lati del poligono da cui si parte. Ma tale complemento di dimostrazione che d'altronde si può fare con metodi elementari (V. FAIFOFER, *Elementi di Geometria*), eccederebbe i limiti imposti al presente Manuale, e ci basti di averlo accennato.

(1) § V. def. 2.

rimetri dei poligoni inscritti nel primo cerchio, con $p', p'_1, p'_2, \ldots$ i perimetri dei poligoni di egual numero di lati inscritti nel secondo Si avrà [1]

$$\frac{p}{p'} = \frac{p_1}{p'_1} = \frac{p_2}{p'_2} = \ldots = \frac{R}{R'}$$

ossia

$$\frac{p}{R} = \frac{p'}{R'}, \quad \frac{p_1}{R} = \frac{p'_1}{R'}, \quad \frac{p_2}{R} = \frac{p'_2}{R'}, \ldots$$

Le due serie di quantità

$$\frac{p}{R}, \quad \frac{p_1}{R}, \quad \frac{p_1}{R}, \ldots$$

e

$$\frac{p'}{R'}, \quad \frac{p'_1}{R'}, \quad \frac{p'_2}{R'}, \ldots$$

hanno dunque i termini corrispondenti costantemente eguali, quindi per il principio sui limiti saranno eguali anche i loro limiti che sono rispettivamente [2]

$$\frac{C}{R} \text{ e } \frac{C'}{R'};$$

onde

$$\frac{C}{R} = \frac{C'}{R'},$$

c. d. d.

Teorema 2. Il rapporto fra la lunghezza della circonferenza e quella del diametro ha un valor costante.

---

(1) § IV, teor. 3, *b*.
(2) § V, defin. 2.

Dalla proporzione stabilita nel teorema precedente risulta

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'},$$

ossia, prese due circonferenze qualunque, il rapporto fra la lunghezza della circonferenza e quella del diametro ha in ambedue lo stesso valore; in altri termini questo rapporto si conserva *costante* in ogni circonferenza.

Osservazione. I. Il rapporto costante fra la circonferenza ed il diametro si suole indicare colla lettera π; si è trovato che questo numero è incommensurabile, ma si hanno metodi per determinarlo coll'approssimazione che si vuole. Il suo valore con un errore di meno di un diecimillionesimo è

$$\pi = 3{,}1415926;$$

per le applicazioni che richiedono minore esattezza si possono usare, secondo i casi, i valori

$$3{,}14, \text{ o } \frac{27}{7}, \text{ o } 3{,}1416, \text{ o } \frac{355}{113}:$$

quest'ultima frazione dà il valore di π a meno di un millionesimo.

II. Abbiamo trovato $\frac{C}{2R} = \pi$, da cui

$$C = 2\pi R. \qquad (a)$$

Questa formola serve a determinare la lunghezza della circonferenza, dato che sia il raggio.

TEOREMA 3. Le aree di due cerchi stanno fra loro come i quadrati dei raggi.

Siano due circonferenze di raggi R, R' e diciamo S, S' le loro aree [1]. Inscriviamo in ambedue i poligoni regolari di $n, 2n, 4n, \ldots$ lati e diciamo $a_1, a_2, a_3, \ldots$ le aree dei poligoni inscritti nel primo ed $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots$ le aree dei poligoni corrispondenti inscritti nel secondo cerchio. Si ha [2]

$$\frac{a}{a'} = \frac{a_1}{a'_1} = \frac{a_2}{a'_2} = \ldots = \frac{R^2}{R'^2}$$

onde

$$\frac{a}{R^2} = \frac{a'}{R'^2}, \quad \frac{a_1}{R^2} = \frac{a'_1}{R'^2}, \quad \frac{a_2}{R^2} = \frac{a'_2}{R'^2}, \ldots$$

Si hanno così le due serie di quantità

$$\frac{a}{R^2}, \quad \frac{a_1}{R^2}, \quad \frac{a_2}{R^2}, \ldots$$

ed

$$\frac{a'}{R'^2}, \quad \frac{a'_1}{R'^2}, \quad \frac{a'_2}{R'^2}, \ldots$$

i cui termini corrispondenti si mantengono costantemente eguali; perciò saranno eguali anche i loro limiti, ossia

$$\frac{S}{R^2} = \frac{S'}{R'^2},$$

c. d. d.

---

(1) § V, defin. 3.
(2) § IV, teor. 3, *c*.

TEOREMA 4. L'area del cerchio è misurata dalla metà del prodotto della circonferenza per il raggio.

Abbiasi un cerchio di raggio R e se ne indichi ancora con C la lunghezza, e con S l'area. Se in questo cerchio inscriviamo i poligoni regolari di n, $2n$, $4n$,... lati, abbiamo per ciascuno di essi [1]

$$\text{area} = \frac{1}{2} \text{ perimetro} \times \text{apotema};$$

quest'eguaglianza valendo per tutti i poligoni della serie varrà anche per i limiti; ma S è il limite delle aree, C dei perimetri, R delle apoteme, onde

$$S = \frac{1}{2} CR. \qquad (b)$$

COROLLARIO. Sostituendo per C il valore dato dalla formola (a) viene

$$S = \pi R^2 \qquad (c)$$

che serve a calcolare l'area del cerchio conoscendone il raggio.

PROBLEMA 1. Calcolare la lunghezza dell'arco di h gradi nella circonferenza di raggio R.

Questo problema si risolve con una semplice proporzione; infatti la circonferenza consta di 360 gradi fra loro eguali, e d'altra parte la sua lunghezza è $2\pi R$, onde detta x la lunghezza dell'arco dato, si avrà:

$$x : 2\pi R = h : 360$$

---

[1] § IV, teor. 4.

da cui

$$x = \frac{2\pi R h}{360}. \qquad (d)$$

PROBLEMA 2. Calcolare l'area del settore circolare (o superficie compresa fra due raggi) quando l'angolo dei due raggi sia di h gradi.

Questo problema si risolve con una proporzione, al pari del precedente: infatti il cerchio si può dividere in 360 settori eguali corrispondenti agli angoli di 1 grado, mentre d'altra parte l'area del cerchio è data da πR^2; detta pertanto s l'area del settore dato, si avrà:

$$s : \pi R^2 = h : 360$$

onde

$$s = \frac{\pi h R^2}{360}. \qquad (e)$$

OSSERVAZIONE. Termineremo questo capitolo dando un breve cenno di uno dei metodi che si possono tenere onde giungere a determinare un valore approssimato del numero π. Si osservi che la lunghezza di una circonferenza di raggio 1 è 2π, e d'altra parte che questa lunghezza è compresa fra i perimetri $p, p'. p'',...$ dei poligoni regolari inscritti di $n, 2n, 4n$ lati, e $P, P', P'',...$ dei poligoni circoscritti di egual numero di lati.

Se partiamo, per esempio, dai quadrati inscritto e circoscritto, troviamo che i loro lati sono rispettivamente $\sqrt{2}$ e 2, onde i loro perimetri sono $4\sqrt{2}$ e 8, ossia 2π è compreso fra 5, 6... e 8, e π fra

2,8... e 4. Ma abbiamo [1] il modo di calcolare il lato del poligono regolare inscritto di $2n$ lati conoscendo il lato del poligono di n lati; inoltre conoscendo il raggio ed il lato di un poligono regolare se ne calcola immediatamente l'apotema: ed il lato del poligono regolare circoscritto stando a quello del poligono inscritto di egual numero di lati come il raggio sta all'apotema, si può calcolare il lato del poligono regolare circoscritto di $2n$ lati. Così procedendo, troveremo per perimetri degli ottagoni regolari inscritto e circoscritto i numeri 6,08 e 6,60; onde π sarà compreso fra 3,04 e 3,30.

Proseguendo nello stesso modo si potranno calcolare di mano in mano i lati ed i perimetri dei poligoni regolari di 16, di 32... lati, inscritti e circoscritti al cerchio di raggio 1; ma fra i perimetri dei poligoni inscritto e circoscritto è sempre compreso 2π, e siccome si hanno due serie di numeri che comprendono 2π e vanno sempre fra loro avvicinandosi, così s'intende come procedendo nel calcolo si possa ottenere il valore di π coll'approssimazione che si vuole.

Il metodo che abbiamo accennato sarebbe praticamente di applicazione lunga e laboriosa quando si volessero raggiungere grandi approssimazioni, e si hanno processi assai più rapidi per calcolare π; ma lo abbiamo indicato perchè è teoricamente uno dei più semplici ed elementari.

---

(1) § IV, teor. 2, osservaz. III.

PARTE SECONDA

GEOMETRIA SOLIDA

CAPITOLO PRIMO

Le figure poliedriche.

§ VII. **Misura degli angoli diedri.**

Si è visto nella *Geometria pura* (§ XIX, teorema 5) che due angoli diedri stanno fra loro come gli angoli rettilinei corrispondenti. Da questa proposizione risulta che se si prende come unità di angolo diedro quel diedro che ha per angolo rettilineo l'unità degli angoli piani, lo stesso numero che misura un angolo piano misurerà anche l'angolo diedro corrispondente.

Si può scegliere come unità l'angolo diedro retto, che, come è noto, ha per rettilineo un angolo piano retto: in tale caso le misure degli angoli piani o diedri si esprimono in parti di angolo retto. Si può anche prendere come unità l'angolo diedro che ha per angolo rettilineo l'angolo piano di un grado e chiamarlo *angolo diedro di un grado;* in tal caso un diedro e l'angolo rettilineo corrispondente hanno per misura lo stesso numero di gradi, minuti e secondi. Ad ogni modo la misura degli angoli diedri si riconduce, mediante il teorema citato, a misura di angoli piani.

§ VIII. Misura del Prisma.

DEFINIZIONE 1. In un parallelipipedo rettangolo una qualunque delle tre costole che concorrono nello stesso vertice chiamasi *dimensione* del parallelipipedo. Un parallelipipedo rettangolo ha dunque tre dimensioni.

Due delle dimensioni si possono riguardare come contenenti il rettangolo di base e la terza va allora considerata come altezza. È chiaro che si può sempre imaginare costruito il parallelipipedo rettangolo avente per dimensioni tre segmenti rettilinei arbitrariamente dati.

DEFINIZIONE 2. Un parallelipipedo rettangolo che ha le tre dimensioni eguali, dicesi *cubo*.

TEOREMA 1. Due parallelipipedi rettangoli di eguale base stanno fra loro come le altezze.

Questo teorema è un caso particolare del teorema 5, § XXI della *Geometria pura.*

TEOREMA 2. Due parallelipipedi rettangoli di eguale altezza stanno fra loro come i prodotti delle altre due dimensioni.

Siano P e P' i volumi dei due parallelipipedi rettangoli, supposti misurati con qualsivoglia unità di volume e siano a, b, c le dimensioni del primo ed a', b', c' quelle del secondo. Si formi un terzo parallelipipedo rettangolo P'' avente per dimensioni a, b', c; per il teorema precedente:

considerando P e P'' come aventi per base il rettangolo contenuto da a, c e per altezze b e b' rispettivamente, si avrà

$$\frac{P}{P''} = \frac{b}{b'};$$

considerando P'' e P' come aventi per base il rettangolo contenuto da b' c e per altezze a e a',

$$\frac{P''}{P'} = \frac{a}{a'};$$

moltiplicando membro a membro le uguaglianze precedenti, si ottiene

$$\frac{P}{P'} = \frac{a \times b}{a' \times b'},$$

c. d. d.

Teorema 3. Due parallelipipedi rettangoli stanno fra loro come i prodotti delle tre dimensioni.

Siano P e P' i volumi dei due parallelipipedi rettangoli ed a, b, c ed a', b', c' le loro dimensioni rispettive. Si formi un terzo parallelipipedo P'' avente per dimensioni a, b' c'.

Considerando P e P'' che hanno la dimensione comune a, si ha per il secondo teorema:

$$\frac{P}{P''} = \frac{b \times c}{b' \times c};$$

considerando P' e P' che hanno a comune le dimensioni b' e c', si ha per il primo teorema:

$$\frac{P''}{P'} = \frac{a}{a'};$$

onde, moltiplicando membro a membro:

$$\frac{P}{P'} = \frac{a \times b \times c}{a' \times b' \times c'},$$

c. d. d.

Teorema 4. Il numero che misura il volume di un parallelipipedo rettangolo è il prodotto dei numeri che ne misurano le tre dimensioni, supposto che l'unità di volume sia il cubo che ha per lato l'unità lineare.

Nella formola trovata

$$\frac{P}{P'} = \frac{a}{a'} \times \frac{b}{b'} \times \frac{c}{c'},$$

si supponga che a', b', c' abbiano eguale lunghezza; di più questa lunghezza venga presa per unità lineare: il parallelipipedo P' sarà il cubo costruito sull'unità lineare e si convenga di assumerlo come unità di volume. Allora $\frac{P}{P'}$ è il rapporto del volume P alla sua unità, ossia la misura (1) di P; così $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$, non sono altro che le misure dei lati a, b, c, e poichè si è convenuto di rappresentare cogli stessi simboli le grandezze e le loro misure, potremo scrivere

$$P = a \times b \times c$$

c. d. d.

Osservazione I. Questo teorema si suole enunciare più brevemente:

Il volume del parallelipipedo rettangolo è misurato dal prodotto delle tre dimensioni,

ed anche (2), poichè il prodotto di due dimensioni misura l'area del rettangolo che esse contengono:

(1) Introduz., III.
(2) § II, teor. 2.

Il volume del parallelipipedo rettangolo è misurato dal prodotto della base per l'altezza.

II. Se le tre dimensioni sono eguali si ha

$$P = a^3,$$

ossia il volume del cubo è misurato dalla terza potenza (detta perciò *cubo*) del suo lato.

TEOREMA 5. Il volume di un parallelipipedo retto è misurato dal prodotto della base per l'altezza.

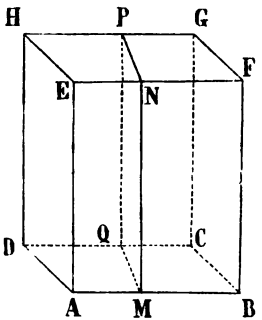

Fig. 14.

Abbiasi il parallelipipedo retto, ma a base non rettangolare $AB \ldots GH$, e si faccia in esso una sezione retta $MNPQ$ cioè perpendicolare alle costole AB, GH. Il prisma proposto, di cui diremo P il volume, sarà equivalente al prisma retto avente per base $MNPQ$ e per altezza AB (1): ma la base $MNPQ$ è un rettangolo perchè

(1) *G. P.*, § XXI, teor. 3.

i diedri in AB,GH essendo retti, sono pure retti $\widehat{M},\widehat{P}$ che ne sono i rispettivi rettilinei; ne viene che il prisma retto di base $MNPQ$ e di altezza AB è un prisma rettangolo, e si ha [1]

$$P = AB \times MQ \times MN$$

Ora la retta AB essendo per costruzione perpendicolare al piano PM, è perpendicolare altresì alla [2] MQ, ossia MQ è l'altezza del parallelogrammo $ABCD$, per cui [3]

$$AB \times MQ = ABCD$$

e sostituendo

$$P = ABCD \times MN.$$

c. d. d.

TEOREMA 6. Il volume di un parallelipipedo qualunque è misurato dal prodotto della base per l'altezza.

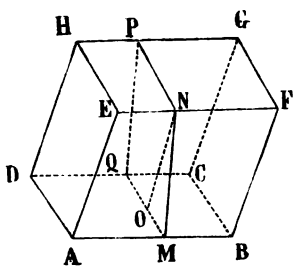

Fig. 15.

Abbiasi il parallelipipedo qualunque $AB \ldots GH$,

(1) Teorema precedente.
(2) *G. P.*, § XVII, defin. 1.
(3) § II, teor. 3.

e si faccia in esso una sezione retta $MNPQ$ perpendicolare alle costole AB, GH. Il volume P del prisma proposto equivale al volume di un prisma retto, avente per base la sezione retta e per altezza la costola AB [1], ma il volume del prisma retto potendosi misurare per mezzo del teorema precedente, si avrà

$$P = MNPQ \times AB.$$

Si conduca ora l'altezza NO del parallelogrammo $MNPQ$; questa è [2] perpendicolare al piano $ABCD$ ed è perciò l'altezza del parallelipipedo primitivo; ma essendo

$$MNPQ = MQ \times NO$$

viene

$$P = MQ \times NO \times AB;$$

essendo finalmente $MQ \times AB$ la misura dell'area $ABCD$,

$$P = AACD \times NO$$

c. d. d.

TEOREMA 7. Il volume di un prisma qualunque è misurato dal prodotto della base per l'altezza.

a) Abbiasi dapprima un prisma triangolare $ABCDEF$ il cui volume si dica P, e si completi il parallelipipedo $AB \ldots FK$ formando il parallelogrammo $ABCH$ sulle AB, AC e conducendo la costola HK parallela alle costole del prisma.

(1) *G. P.*, § XXI, teor. 3.
(2) *G. P.*, § XIX, teor. 9.

Il parallelipipedo così costruito ha la medesima altezza di P, ed ha un volume doppio perchè, come si è visto nella *Geometria pura* [1], il piano diagonale divide un parallelipipedo in due prismi triangolari equivalenti. Ora per il teorema precedente si ha

$$2\,P = ABCH \times DO;$$

ma si ha altresì che $ABCH$ è doppio di ABC, onde

$$2\,P = 2\,ABC \times DO,$$

ossia

$$P = ABC \times DO,$$

c. d. d.

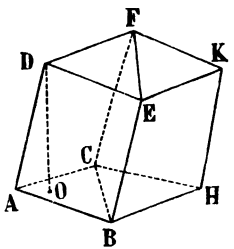

Fig. 16.

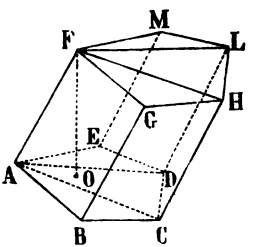

Fig. 17.

b) Abbiasi ora un prisma qualunque

$$ABC\ldots\ HLM,$$

la cui altezza sia FO: se per la costola AF e le

(1) *G. P.*, § XXI, teor. 5.

costole non consecutive $CH, DL, \ldots$ si fanno passare i piani $AFCH$, $AFDL, \ldots$ il prisma verrà a scomporsi in tanti prismi triangolari $ABCFGH$, $CADHFL, \ldots$ aventi l'altezza comune FO. Detti P_1, P_2, P_3, i volumi dei prismi triangolari e P il volume del prisma dato, si ha (a)

$$P_1 = ABC \times FO$$
$$P_2 = ACD \times FO$$
$$P_3 = ADE \times FO,$$

e sommando

$$P = (ABC + ACD + ADE) \times FO = ABCDE \times FO.$$

TEOREMA 8. **La superficie laterale del prisma retto è misurata dal prodotto dell'altezza per il perimetro di base.**

Infatti nel prisma retto le faccie laterali essendo rettangoli, la superficie laterale sarà la somma di tanti rettangoli $ABFG$, $BGCH$, $CHDL$, ecc., ciascuno dei quali è misurato dal prodotto dell'altezza che è l'altezza del prisma, per la base, che è uno dei lati del poligono base del prisma. Talchè si avrà:

$$ABFG = AF \times AB$$
$$BCGH = AF \times BC$$
$$CHDL = AF \times CD$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

e sommando:

Superf. laterale del prisma =

$$AF \times (AB + BC + CD + \ldots),$$

c. d. d.

§ IX. Misura della Piramide.

Teorema 1. Se due piramidi $SABC$, $S'A'B'C'$ hanno eguali altezze $SH = S'H'$ e basi equivalenti, le sezioni MNP, $M'N'P'$ fatte ad eguali distanze $SK = S'K'$ dai vertici sono equivalenti.

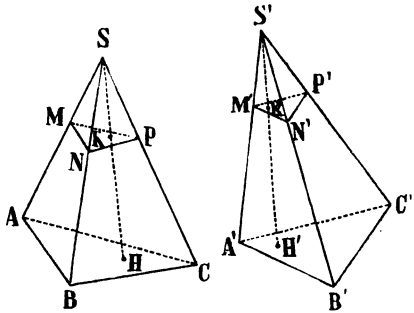

Fig. 18.

Sappiamo che MNP è simile ad ABC, ed $M'N'P'$ simile ad $A'B'C'$ (1) e sappiamo altresì (2) che

$$\frac{MN}{AB} = \frac{SK}{SH}, \quad \frac{M'N'}{A'B'} = \frac{S'K'}{S'H'}.$$

Ma dalla similitudine di MNP, ABC ed $M'N'P'$, $A'B'C'$ risulta (3)

$$\frac{MNP}{ABC} = \frac{\overline{MN}^2}{\overline{AB}^2}$$

(1) *G. P.*, § XXII, teor. 1.
(2) Ibid.
(3) § II, teor. 6.

ed

$$\frac{M'N'P'}{A'B'C'} = \frac{\overline{M'N'}^2}{\overline{A'B'}^2},$$

onde ancora

$$\frac{MNP}{ABC} = \frac{\overline{SK}^2}{\overline{SH}^2}, \qquad \frac{M'N'P'}{A'B'C'} = \frac{\overline{S'K'}^2}{\overline{S'H'}^2};$$

ma per ipotesi

$$SK = S'K', SH = S'H',$$

onde

$$\frac{\overline{SK}^2}{\overline{SH}^2} = \frac{\overline{S'K'}^2}{\overline{S'H'}^2}$$

e

$$\frac{MNP}{ABC} = \frac{M'N'P'}{A'B'C'};$$

ma per ipotesi

$$ABC = A'B'C'$$

onde [1] sarà pure

$$MNP = M'N'P',$$

c. d. d.

Teorema 2. Due piramidi $SABC$, $S'A'B'C$ di eguale altezza e di basi equivalenti sono equivalenti.

Se è possibile, le due piramidi S ed S' non

[1] *G. P.*, § XI, *d*).

siano equivalenti, ed abbia maggior volume la S; la differenza dei due volumi sarà un volume che si può immaginare foggiato a prisma, avente per base la base ABC della piramide S e per altezza una lunghezza che indicheremo con x.

Si divida l'altezza comune delle due piramidi in n parti eguali: essendo n qualunque, ma tanto grande che la n^{sima} parte dell'altezza, che diremo y, riesca inferiore ad x, il che si potrà sempre fare; e dai punti di divisione dell'altezza si tirino

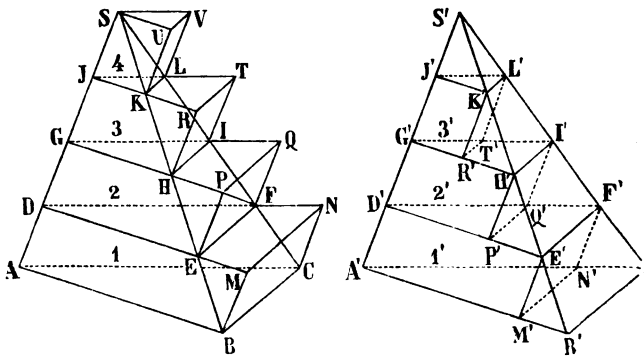

Fig. 19.

le sezioni parallele alla base, DEF, GHI, JKL nella prima e $D'E'F', G'H'I', J'K'L'$ nella seconda piramide; si completino poi i prismi aventi per basi queste sezioni e per altezze la n^{sima} parte dell'altezza delle piramidi, *inscrivendoli* alla piramide S' e *circoscrivendoli* alla piramide S; denotiamo con 1, 2, 3, 4 questi ultimi e con 1', 2', 3'

i prismi iscritti in S'. I prismi $1'$ e 2 sono equivalenti perchè hanno la stessa altezza y, e le basi $DEF, D'E'F'$ equivalenti [1]; similmente sono equivalenti i prismi $2'$ e 3, $3'$ e 4; il prisma 1 è dunque la differenza fra il complesso dei prismi circoscritti ad S ed il complesso dei prismi inscritti in S'. Aggiungasi che i prismi circoscritti ad S dando un volume maggiore di S, e quelli inscritti in S' dando un volume minore di S', la differenza fra i due sistemi dei prismi sarà maggiore della differenza fra le due piramidi.

Ma il prisma avente per base ABC e per altezza x (maggiore di y per costruzione) e che rappresenta la differenza fra i volumi delle piramidi, è maggiore del prisma di base ABC e di altezza y che rappresenta la differenza fra i due sistemi di prismi: giungiamo pertanto ad una necessaria contraddizione tostochè ammettiamo che fra i volumi delle due piramidi di eguale altezza e di basi equivalenti possa passare una qualunque differenza. Le piramidi S, S' devono dunque essere equivalenti, c. d. d.

La dimostrazione precedente fatta per il caso di piramidi triangolari si applica senza modificazione a piramidi di base qualunque.

TEOREMA 3. Il volume della piramide è misurato dal terzo del prodotto della base per l'altezza.

a) Abbiasi dapprima la piramide triangolare

$$SABC;$$

[1] Teor. 1.

si formi il prisma triangolare *ABCSDE* avente per base *ABC* ed uno dei vertici opposti nel vertice *S* della piramide. Il prisma si può scomporre nelle tre piramidi *SABC*, *SBDE*, *SBCE* che hanno due a due eguali basi ed eguali altezze [1] e sono quindi equivalenti [2]; perciò il volume del

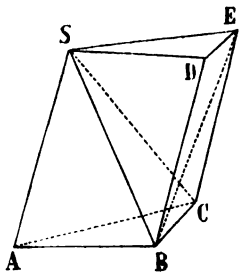

Fig. 20.

prisma sarà triplo del volume della piramide *SABC* di eguale base ed eguale altezza. Ma il volume del prisma è misurato dal prodotto della base per l'altezza, onde il volume della piramide è misurato dal terzo del prodotto della base per l'altezza.

b) Abbiasi ora una piramide qualunque

SABCDE

di altezza *SO*; questa si scompone per mezzo dei piani *SAC*, *SAD* in tante piramidi triangolari

(1) *G. P.*, § XXII, teor. 3.
(2) Teorema precedente.

$SABC$, $SACD$, $SADE$ aventi l'altezza comune SO. Detti P_1, P_2, P_3 i volumi delle piramidi trian-

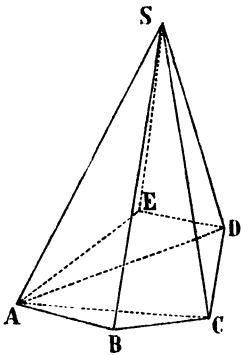

Fig. 21.

golari, e P il volume della piramide data, si ha

$$P_1 = \frac{1}{3} ABC \times SO$$

$$P_2 = \frac{1}{3} ACD \times SO$$

$$P_3 = \frac{1}{3} ADE \times SO,$$

onde sommando:

$$P = \frac{1}{3} (ABC + ACD + ADE) \times SO =$$

$$= \frac{1}{3} ABCDE \times SO.$$

TEOREMA 4. Il volume del tronco di piramide è misurato dalla formola

$$V=\frac{1}{3}A\times B\times\left(1+\frac{l}{L}+\frac{l^2}{L^2}\right)$$

dove V rappresenta il volume, A l'altezza, B e b le due basi, e L ed l due lati omologhi delle basi.

a) Abbiasi dapprima un tronco di piramide triangolare; è noto (1) che esso si può scomporre in tre piramidi aventi per altezza comune l'altezza A del tronco e per basi, rispettivamente B, b, ed una media proporzionale fra B e b, ossia $\sqrt{Bb}$. Si ha dunque

$$V=\frac{1}{3}A\times B+\frac{1}{3}A\times b+\frac{1}{3}A\times\sqrt{Bb}. \quad (1)$$

Ora sappiamo che le basi B e b sono simili, per cui essendo L ed l due dei loro lati omologhi, si avrà (2)

$$\frac{B}{b}=\frac{L^2}{l^2}$$

onde

$$b=\frac{Bl^2}{L^2}$$

e

$$\sqrt{Bb}=\frac{Bl}{L}.$$

Sostituendo nella (1) viene

$$V=\frac{1}{3}AB+\frac{1}{3}\frac{ABl^2}{L^2}+\frac{1}{3}\frac{ABl}{L}$$

(1) *G. P.*, § XXII, teor. 4.
(2) § II, teor. 6.

e raccogliendo:

$$V = \frac{1}{3} AB \left(1 + \frac{l}{L} + \frac{l^2}{L^2}\right)$$

c. d. d.

b) Abbiasi ora un tronco di piramide a basi qualunque $AB \ldots HKL$. Le costole AF, CH sono in uno stesso piano perchè concorrerebbero nel vertice della piramide, e lo stesso dicasi di AF,

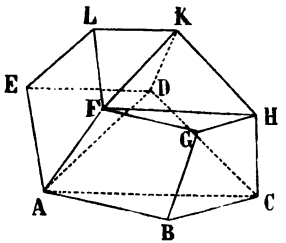

Fig. 22.

DK; conducendo questi piani si scompone il tronco in tre tronchi a base triangolare di eguale altezza A, ed indicando con V_1, V_2, V_3 i loro volumi e con B_1, B_2, B_3 le loro basi inferiori si ha

$$V_1 = \frac{A \times B_1}{3} \left[1 + \frac{AB}{FG} + \left(\frac{AB}{FG}\right)^2\right]$$

$$V_2 = \frac{A \times B_2}{3} \left[1 + \frac{CD}{HK} + \left(\frac{CD}{HK}\right)^2\right]$$

$$V_3 = \frac{A \times B_3}{3} \left[1 + \frac{ED}{KL} + \left(\frac{ED}{KL}\right)^2\right];$$

ma le basi essendo simili

$$\frac{AB}{FG}=\frac{CD}{HK}=\frac{ED}{KL}=\frac{l}{L},$$

onde sostituendo e sommando

$$V=\frac{1}{3}A\,(B_1+B_2+B_3)\left(1+\frac{l}{L}+\frac{l^2}{L^2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}A\,.\,B\left(1+\frac{l}{L}+\frac{l^2}{L^2}\right),$$

c. d. d.

DEFINIZIONE 1. Una piramide che ha per base un poligono regolare e la cui altezza cade nel centro della base si dice *regolare*.

2. *Apotema* di una piramide regolare è la perpendicolare abbassata dal vertice ad uno dei lati della base.

3. Tagliando una piramide regolare con un piano parallelo alla base si forma un *tronco di piramide regolare*. *Apotema* del tronco è la porzione di apotema della piramide compresa fra le due basi.

TEOREMA 5. La superficie laterale della piramide regolare è misurata dalla metà del prodotto del perimetro di base per l'apotema.

Abbiasi la piramide regolare *SABCD* di cui *SO* sia l'altezza, *SH*, *SK* le apoteme (fig. 23). Le oblique *SA*, *SB*, *SC*,... essendo egualmente distanti dal piede *O* della perpendicolare [1] che è centro del poligono di base, sono eguali, quindi sono eguali i triangoli *SAB*, *SBC*,... come aventi i tre lati eguali ciascuno a ciascuno, e sono perciò eguali

[1] *G. P.*, § XVII, teor. 5.

anche le apoteme SH, SK. Ora [1]

$$SAB = \frac{1}{2} SH \times AB,$$

$$SBC = \frac{1}{2} SK \times BC,$$

. . . . . .

sommando e notando che

$$SH = SK = \ldots$$

viene:

$$\textit{Superf. lat. della piram.} = \frac{1}{2} SH (AB + BC + \ldots),$$

c. d. d.

TEOREMA 6. **La superficie laterale del tronco di piramide regolare è misurata dalla metà del prodotto dell'apotema per la somma dei perimetri delle basi.**

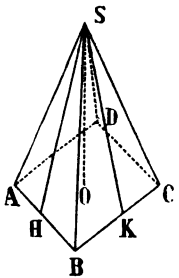

Fig. 23.

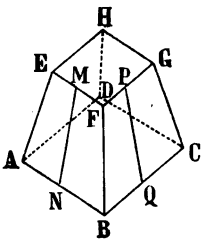

Fig. 24.

Abbiasi il tronco di piramide regolare $AB \ldots GH$,

(1) § II, teor. 4.

e siano $MN, PQ\ldots$ le sue apoteme. Risulta dalla dimostrazione del teorema precedente che

$$MN = PQ = \ldots.$$

onde si ha [1]

$$\text{area } ABEF = \frac{1}{2} MN(AB + EF),$$

$$\text{area } BCFG = \frac{1}{2} PQ\,(BC + FG),$$

. . . . . .

sommando e notando che $MN = PQ = \ldots$, si ottiene:

Superficie laterale del tronco di piramide =

$$= \frac{1}{2} MN(AB + BC + \ldots + EF + FG + \ldots)$$

c. d. d.

---

(1) § II, teor. 5.

CAPITOLO II.

I corpi rotondi.

§ X. Misura del Cilindro e del Cono.

DEFINIZIONE 1. Un prisma si dice *regolare* quando è retto ed ha per base un poligono regolare.

2. Un prisma retto si dice *inscritto* ad un cilindro (circolare retto) quando le basi del prisma sono inscritte alle basi del cilindro; *circoscritto* quando le basi del prisma sono circoscritte alle basi del cilindro.

OSSERVAZIONE. Le costole di un prisma inscritto in un cilindro sono generatrici del cilindro, ed il prisma ha la stessa altezza del cilindro.

DEFINIZIONE 3. Una piramide regolare si dice *inscritta* o *circoscritta* ad un cono quando la base della piramide è inscritta o circoscritta alla base del cono ed il vertice della piramide coincide col vertice del cono.

OSSERVAZIONE. Le costole della piramide inscritta ad un cono sono generatrici del cono, ed i due solidi hanno la medesima altezza.

Se si considerano i prismi regolari inscritti in un dato cilindro ed aventi per basi i poligoni regolari di n, $2n$, $4n$, . lati, indi i prismi regolari circoscritti le cui basi hanno egual numero di

lati, si scorge chiaramente che le superficie laterali ed i volumi dei prismi inscritti vanno crescendo di mano in mano che cresce il numero delle loro faccie, mantenendosi però sempre inferiori rispettivamente alla superficie laterale ed al volume di uno qualunque dei prismi circoscritti. Per questi avviene invece che al crescere del numero dei lati della base vanno diminuendo le superficie laterali ed i volumi, mantenendosi però sempre maggiori della superficie laterale e del volume di uno qualunque dei prismi inscritti. Inoltre la differenza fra la superficie dei prismi inscritti e circoscritti si può, al crescere del numero delle faccie, rendere piccola quanto si vuole, e lo stesso dicasi dei volumi. Si intuisce da ciò l'esistenza di una superficie e di un volume determinati, cui le superficie laterali ed i volumi dei prismi inscritti e circoscritti vanno accostandosi indefinitamente, i primi mantenendosi sempre minori ed i secondi sempre maggiori. Questa superficie e questo volume si diranno rispettivamente superficie laterale e volume del cilindro; e ricordando la definizione 1 del § V, potremo enunciare:

DEFINIZIONE 4. La *superficie laterale* del cilindro è il limite cui tendono le superficie laterali dei prismi regolari inscritti o circoscritti, quando se ne raddoppia indefinitamente il numero delle faccie laterali.

5. Il *volume* del cilindro è il limite cui tendono nel medesimo caso i volumi dei prismi regolari inscritti o circoscritti.

Considerazioni analoghe a quelle che precedono permettono di enunciare ancora:

DEFINIZIONE 6. La *superficie laterale* ed il *volume* del cono sono i limiti cui tendono rispettivamente le superficie laterali ed i volumi delle piramidi regolari inscritte o circoscritte, quando il numero delle loro faccie laterali si raddoppia indefinitamente.

7. La *superficie laterale* ed il *volume* del tronco di cono sono i limiti cui tendono rispettivamente le superficie laterali ed i volumi dei tronchi di piramidi regolari inscritti e circoscritti, quando il numero delle loro faccie laterali si raddoppia indefinitamente.

Indicheremo in ciò che segue con S la superficie laterale del cilindro, cono o tronco di cono che si considera, con V il volume, con A l'altezza, con L la generatrice; con R il raggio della base del cilindro o del cono e con R ed r i raggi delle basi nel tronco di cono.

TEOREMA 1. La superficie laterale del cilindro è misurata dal prodotto della circonferenza di base per l'altezza; il volume del cilindro è misurato dal prodotto dell'area della base per l'altezza.

Inscriviamo nel cilindro i prismi regolari aventi per base i poligoni di n, $2n$, $4n$,... lati ed indichiamo:

con v, v', v'',... i volumi e con s, s', s'',... le superficie laterali dei prismi;

con p, p', p'',... i perimetri e con b, b', b'',... le aree delle basi.

I prismi avendo tutti la stessa altezza del cilindro, si ha [1]

$$s = Ap,\ s' = Ap',\ s'' = Ap'',\ldots;$$

[1] VIII, teor. 7.

abbiamo così le due serie di quantità

$$s,\ s',\ s'',\ldots$$

ed

$$Ap,\ Ap',\ Ap'',\ldots$$

i cui termini corrispondenti sono eguali, per cui [1] anche i rispettivi limiti saranno eguali; ma il limite delle s, s', s'',... è la superficie laterale S del cilindro, il limite dei perimetri p, p', p'',... è la circonferenza di base [2]; onde *la superficie laterale del cilindro è misurata dal prodotto dell'altezza per la circonferenza di base.*

Si ha parimenti [3]

$$v = Ab,\ v' = Ab',\ v'' = Ab'',\ldots$$

onde i limiti cui tendono le due serie di grandezze

$$v,\ v',\ v'',\ldots$$

ed

$$Ab,\ Ab',\ Ab'',\ldots$$

saranno eguali; ma il limite delle v, v',... è il volume V del cilindro, il limite delle aree b, b',... è l'area del cerchio di base [4]; onde *il volume del cilindro è misurato dal prodotto del cerchio di base per l'altezza.*

Corollario 1. Ritenendo le notazioni indicate

(1) § V, Principio sui limiti.
(2) § V, defin. 2.
(3) § VIII, teor. 6.
(4) § V defin. 3.

e ricordando le formole del § VI, si ha:

$$S = 2\pi RA, \quad V = \pi R^2 A.$$

2. La superficie totale Σ del cilindro essendo costituita dalla superficie laterale più le due basi, si ha:

$$\Sigma = 2\pi RA + 2\pi R^2 = 2\pi R(A + R).$$

TEOREMA 2. La superficie laterale del cono è misurata dalla metà del prodotto della circonferenza di base per la generatrice; ed il volume è misurato dal terzo del prodotto della base per l'altezza.

Indichiamo con s, s', s'',... le superficie laterali e con v, v', v'',... i volumi, con h, h', h'',... le apoteme, con p, p', p'',... i perimetri e con b, b', b'',... le aree delle basi delle piramidi regolari inscritte di n, $2n$, $4n$,... faccie laterali.

Le superficie laterali di queste piramidi sono date [1] da:

$$s = \frac{1}{2}ph, \; s' = \frac{1}{2}p'h', \; s'' = \frac{1}{2}p''h'', \ldots$$

onde i limiti cui tendono le due serie di grandezze

$$s, \; s', \; s'', \ldots$$

ed

$$\frac{1}{2}ph, \; \frac{1}{2}p'h', \; \frac{1}{2}p''h'', \ldots$$

saranno eguali; ma il limite delle s, s', s'',... è la superficie laterale del cono, il limite delle

[1] § IX, teor. 5.

$p, p', p'', \ldots$ è la circonferenza di base, infine il limite delle apoteme $h, h', h'', \ldots$ è manifestamente la generatrice del cono; onde *la superficie laterale del cono è misurata dalla metà del prodotto della circonferenza di base per la generatrice.*

Si ha parimente [1]

$$v = \frac{1}{3} A . b, \; v' = \frac{1}{3} A . b', \; v'' = \frac{1}{3} A . b'', \ldots$$

onde i limiti cui tendono le due serie di grandezze

$$v, v', v'', \ldots$$

ed

$$\frac{1}{3} A . b, \frac{1}{3} A . b', \frac{1}{3} A . b'', \ldots$$

saranno eguali; ma essendo limite delle $v, v', v'', \ldots$ il volume del cono e delle $b, b', b'', \ldots$ il cerchio di base, si ha che *il volume del cono è misurato dal terzo del prodotto della base per l'altezza.*

Corollario 1. Il teorema precedente si esprime colle formole

$$S = \pi RL, \qquad V = \frac{1}{3} \pi R^2 A.$$

2. La superficie Σ totale di un cono essendo formata dalla superficie laterale e dal cerchio di base, si avrà

$$\Sigma = \pi RL + \pi R^2 = \pi R (L + R).$$

---

(1) § IX, teor. 3.

TEOREMA 3. La superficie laterale di un tronco di cono è misurata dal prodotto della semi-somma delle circonferenze di base per l'apotema; ed il volume è misurato dalla formola

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 A \left(1 + \frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2}\right).$$

Indichiamo con

$s, s', s'', \ldots$ le superficie laterali,

$v, v', v'', \ldots$ i volumi,

$p, p', p'', \ldots$ e $P, P', P'', \ldots$ i perimetri delle basi superiori ed inferiori,

$b, b', b'', \ldots$ e $B, B', B'', \ldots$ le aree delle basi,

$h, h', h'', \ldots$ le apoteme

dei tronchi di piramidi regolari aventi rispettivamente per basi poligoni di n, $2n$, $4n, \ldots$ lati ed inscritti nel tronco di cono.

Si ha [1]

$$s = \frac{1}{2}(p + P) \cdot h, \quad s' = \frac{1}{2}(p' + P') \cdot h'$$

$$s'' = \frac{1}{2}(p'' + P'') \cdot h'', \ldots$$

onde i limiti cui tendono le due serie di quantità

$$s, s', s'', \ldots$$

ed

$$\frac{1}{2}(p + P) \cdot h, \quad \frac{1}{2}(p' + P') \cdot h',$$

$$\frac{1}{2}(p'' + P'') \cdot h'', \ldots$$

(1) § IX, teor. 6.

saranno eguali; ma essendo limite delle $s, s', s'', \ldots$ la superficie laterale del tronco di cono, delle $p, p', \ldots$ e $P, P', \ldots$ le circonferenze di base, delle $h, h', \ldots$ l'apotema, si ha che *la superficie laterale del tronco di cono è misurata dalla semi-somma delle circonferenze di base per l'apotema.*

Si ha pure [1]

$$v = \frac{1}{3} A \,.\, B \left(1 + \frac{c}{C} + \frac{c^2}{C^2}\right),$$

$$v' = \frac{1}{3} A \,.\, B' \left(1 + \frac{c'}{C'} + \frac{c'^2}{C'^2}\right),$$

. . . . . .

dove c e C, c' e $C', \ldots$ sono lati omologhi nei poligoni di base dei tronchi di piramidi; ma essendo essi inscritti nei cerchi di raggi r ed R si ha [2]

$$\frac{c}{C} = \frac{c'}{C'} = \ldots = \frac{r}{R},$$

onde

$$v = \frac{1}{3} A \,.\, B \left(1 + \frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2}\right),$$

$$v' = \frac{1}{3} A \,.\, B' \left(1 + \frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2}\right),$$

. . . . . .

e poichè $B, B', \ldots$ hanno per limite πR^2, si avrà

(1) § IX, teor. 4.
(2) § IV, teor. 3.

passando al limite

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 . A\left(1 + \frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2}\right),$$

c. d. d.

Corollario 1. La superficie laterale è espressa da

$$S = \pi L (R + r);$$

la superficie totale è composta di questa, più i due cerchi di base, ossia è data da

$$\Sigma = \pi L (R + r) + \pi R^2 + \pi r^2 =$$
$$= \pi R (L + R) + \pi r (L + r).$$

2. La formola che dà il volume potendosi scrivere

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 A + \frac{1}{3}\pi r^2 A + \frac{1}{3}\pi R r A,$$

si può dire che:

Il volume del tronco di cono equivale al volume di tre coni aventi per altezza comune l'altezza del tronco e per basi rispettivamente la base superiore, l'inferiore ed una media proporzionale fra queste due basi.

§ VI. Misure relative alla Sfera.

Teorema 1. Se un segmento rettilineo AB ruota intorno ad una retta indefinita xy *(asse)* contenuta nel suo piano e che non l'attraversa, e si innalza la perpendicolare MH ad esso nel suo punto di mezzo fino all'incontro coll'asse, il segmento genera una superficie che

è misurata dal prodotto della sua proiezione CD sull'asse per la circonferenza di raggio MH (1).

a) Se il segmento AB è parallelo all'asse, esso genera nel ruotare intorno ad xy la superficie laterale di un cilindro (2) che avrà per base la circonferenza descritta da AC e per altezza CD; onde (3)

$$sup.\ AB = 2\pi AC \,.\, CD,$$

ma essendo $AC = MH$,

$$sup.\ AB = 2\pi MH \,.\, CD.$$

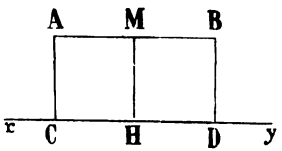

Fig. 25.

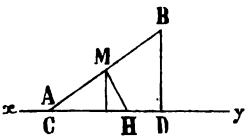

Fig. 26.

b) Se il segmento AB ha un estremo sull'asse, cioè se il suo estremo A coincide col punto C, esso genera la superficie laterale di un cono (4) che avrà per base la circonferenza descritta da BD e per generatrice AB; onde (5)

$$sup.\ AB = \pi BD \times AB.$$

---

(1) La superficie generata da una linea AB verrà indicata per brevità colla scrittura *Sup. AB.*

(2) *G. P.*, § XXIII, defin. 3.

(3) § X, teor. 1.

(4) *G. P.*, § XXIII, defin. 4 e 5.

(5) § X, teor. 2.

Ma i triangoli ABD, AMH, simili come aventi $\widehat{D} = \widehat{M}$ perchè retti ed $\widehat{A}$ comune, dànno la proporzione

$$AD : AM = BD : MH$$

onde [1]

$$AD \times MH = BD \times AM = BD \times \frac{AB}{2}$$

ossia

$$BD \times AB = 2\, CD \times MH$$

e sostituendo,

$$sup.\ AB = 2\pi\, MH \,.\, CD.$$

c) Se finalmente il segmento AB è inclinato

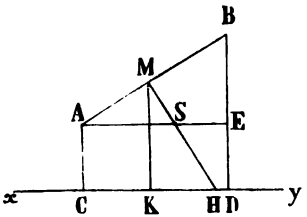

Fig. 27.

rispetto all'asse, esso genera la superficie laterale di un tronco di cono [2] avente per raggi delle

(1) § II, teor. 2, osservaz. II.
(2) *G. P.*, § XXIII, defin. 6.

basi AC, BD e per apotema AB, onde [1]

$$sup.\ AB = \pi\,(AC + BD)\,AB.$$

Ora la retta MK che passa per i punti di mezzo dei lati del trapezio $ABCD$ è parallela alle basi AC, BD ed eguale alla loro semi-somma [2]; ma se si tira la parallela AE a CD, i triangoli BAE, MKH avendo

$$\widehat{E} = \widehat{K}$$

perchè retti, e

$$\widehat{BAE} = \widehat{KMH}$$

come aventi i lati perpendicolari, sono simili e dànno la proporzione

$$AB : AE = MH : MK,$$

onde

$$AB\,.\,MK = MH\,.\,AE,$$

ma

$$MK = \frac{AC + BD}{2},\ AE = CD$$

onde

$$AB\,.\,(AC + BD) = 2\,AB\,.\,MK = 2\,MH\,.\,CD$$

e sostituendo

$$sup.\ AB = 2\,MH\,.\,CD$$

c. d. d.

Teorema 2. Se $ABCDE$ è la metà di un poligono re-

---

(1) § X, teor. 3.
(2) § II, teorema 5, osserv.

golare di un numero pari di lati, e si fa ruotare la figura intorno al suo diametro AE, il perimetro $ABCDE$ genera una superficie misurata dal prodotto del diametro per la circonferenza inscritta al poligono.

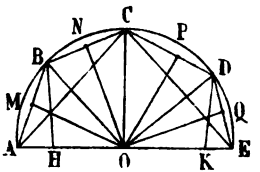

Fig. 28.

Si abbassino dal centro le apoteme OM, ON, OP,... che dividono i lati del poligono per metà e perpendicolarmente; si abbassino pure dai vertici le perpendicolari BH, CO, DK all'asse. Si ha per il teorema precedente

$$sup.\ AB = 2\pi AH \,.\, MO$$
$$sup.\ BC = 2\pi HO \,.\, NO$$
$$sup.\ CD = 2\pi OK \,.\, PO$$
$$sup.\ DE = 2\pi KE \,.\, QO$$

ma la superficie generata dal perimetro $ABCDE$ non essendo altro che la somma delle superficie generate da AB, CD,.., ed essendo

$$MO = NO = \ldots,$$

viene sommando

$$sup.\ ABCDE = 2\pi MO\,(AH + HO + \ldots) =$$
$$= 2\pi MO \,.\, AE,$$

c. d. d.

Teorema 3. La misura della superficie S della sfera di raggio R è espressa dalla formola

$$S = 4\pi R^2.$$

Sappiamo [1] che una semi-circonferenza ruotando intorno ad un suo diametro genera una superficie sferica; se ora in essa semi-circonferenza (vedi fig. 27) si inscrivono i semi-poligoni regolari ACE, $ABCDE$,... di n, $2n$... lati, si intuisce che le superficie generate dai perimetri di questi semi-poligoni tenderanno (quando il numero dei loro lati cresce indefinitamente) ad un limite che sarà la superficie della sfera. Indicando con S_1, S_2, S_3,... le superficie generate dai perimetri dei semi-poligoni, e con a_1, a_2, a_3,... le relative apoteme, avremo, essendo $AE = 2R$:

$$S_1 = 4\pi Ra_1, \quad S_2 = 4\pi Ra_2, \quad S_3 = 4\pi Ra_3, \ldots$$

onde i limiti cui tendono le due serie di grandezze

$$S_1, S_2, S_3, \ldots$$

e

$$4\pi Ra_1, \quad 4\pi Ra_2, \quad 4\pi Ra_3, \ldots$$

devono essere eguali; ma essendo S il limite delle S_1, S_2,... ed R il limite delle apoteme a_1, a_2,... viene

$$S = 4\pi R^2,$$

c. d. d.

Corollario 1. Poichè πR^2 è l'area di un cerchio massimo, si può dire che la superficie sferica

---

[1] *G. P.*, § XXIV, defin. 1.

è equivalente all'area di quattro circoli massimi.

2. La superficie di due sfere sono fra loro come i quadrati dei raggi.

TEOREMA 4. Se un triangolo ABC ruota intorno ad un asse indefinito xy contenuto nel suo piano e che passa per il vertice A senza attraversare il triangolo medesimo, esso genera un volume che è misurato dal terzo del prodotto della superficie generata dal lato BC (opposto al vertice che è sull'asse) per l'altezza AH corrispondente (1).

a) Il triangolo abbia il lato AC sull'asse. Si abbassi l'altezza BK. Il volume generato dal

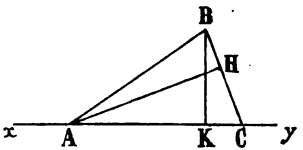

Fig. 29.

triangolo ABC è la somma dei volumi dei due coni generati da ABK, CBK i quali hanno per base comune il cerchio di centro K e di raggio KB, e per altezze rispettivamente AK e CK.

Si ha dunque (2)

$$vol.\ ABC = \frac{1}{3}\pi\,\overline{BK}^2 . AK + \frac{1}{3}\pi\,\overline{BK}^2 . CK$$

$$= \frac{1}{3}\pi\,\overline{BK}^2 (AK + KC) = \frac{1}{3}\pi\,\overline{BK}^2 . AC.$$

(1) Il volume generato da un'area ABC si indicherà per brevità con *vol. ABC*.

(2) § X, teor. 2, coroll. 1.

Ora si noti che i prodotti $BK.AC$ e $AH.BC$ misurando ambedue il doppio dell'area del triangolo ABC [1] sono eguali; si avrà quindi

$$vol.\,ABC = \frac{1}{3}\pi\, BK.AH.BC;$$

d'altra parte la superficie generata da BC è la superficie laterale del cono BCK e sarà quindi misurata da

$$\pi\, BK.BC;$$

sostituendo, viene

$$vol.\,ABC = \frac{1}{3} AH.sup.\,BC,$$

c. d. d.

b) Il lato BC del triangolo incontri l'asse

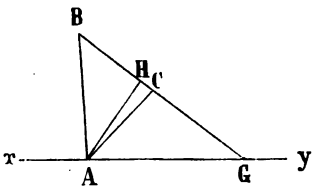

Fig. 30.

xy nel punto G; in tal caso il volume generato da ABC è la differenza fra i volumi generati da

(1) § II, teor. 4.

ABG e CAG; ma per il caso precedente si ha:

$$vol.\, ABG = \frac{1}{3}\, AH\,.\, sup.\, BG$$

$$vol.\, ACG = \frac{1}{3}\, AH\,.\, sup.\, CG$$

onde sottraendo:

$$vol.\, ABC = \frac{1}{3}\, AH\,.\, (sup.\, BG - sup.\, CG) =$$

$$= \frac{1}{3}\, AH\,.\, sup.\, BC,$$

c. d. d.

c) Il lato BC sia parallelo all'asse (fig. 31).

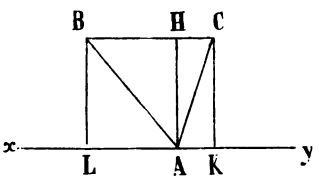

Fig. 31.

Si abbassino le perpendicolari BL, CK all'asse; il rettangolo $AHBL$ genera il cilindro, il triangolo BAL un cono di eguale base ed altezza; il volume generato da BAH sarà la differenza fra il cilindro ed il cono; ora essendo [1]

$$vol.\, ALBH = \pi\, \overline{BL}^2\,.\, AL$$

$$vol.\, ALB = \frac{1}{3}\, \pi\, \overline{BL}^2\,.\, AL$$

[1] § X, teor. 1 e 2.

viene sottraendo

$$vol.\, ABH = \frac{2}{3}\pi\, \overline{BL}^2 . AL = \frac{2}{3}\pi\, \overline{AH}^2 . AL.$$

Similmente si troverebbe:

$$vol.\, ACH = \frac{2}{3}\pi\, \overline{AH}^2 . AK$$

onde sommando

$$vol.\, ABC = \frac{2}{3}\pi\, \overline{AH}^2 (AL + AK) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\, \overline{AH}^2 . LK.$$

Ora la superficie laterale del cilindro $BCLK$ è generata dal lato BC ed è misurata da

$$2\pi\, CK . LK = 2\pi\, AH . LK,$$

onde sostituendo

$$vol.\, ABC = \frac{2}{3} AH . sup.\, BC,$$

c. d. d.

TEOREMA 5. Se $ABCDE$, metà di un poligono regolare di un numero pari di lati, si fa ruotare intorno al suo diametro AE, l'area del semi-poligono genera un volume che avrà per misura il terzo del prodotto dell'apotema per la superficie generata dal perimetro $ABCDE$.

Per mezzo dei raggi OB, OC, OD, si scomponga il semi-poligono in tanti triangoli aventi per altezze le apoteme

$$OM,\ ON, \ldots;$$

si avrà applicando il teorema precedente:

$$vol.\ AOB = \frac{1}{3}\ OM\ .\ sup.\ AB,$$

$$vol.\ BOC = \frac{1}{3}\ ON\ .\ sup.\ BC,$$

. . . . . .

sommando, notando che il volume generato dal

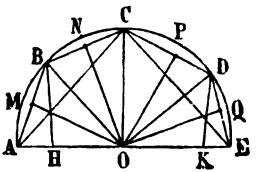

Fig. 32.

semi-poligono è la somma dei volumi generati dai singoli triangoli e che le apoteme *OM, ON* sono eguali fra loro, si ottiene

$$vol.\ ABCDE = \frac{1}{3}\ OM\ .\ sup.\ ABCDE,$$

c. d. d.

TEOREMA 6. Il volume della sfera è misurato dal terzo del prodotto della superficie sferica per il raggio.

Sappiamo (1) che il semi-cerchio ruotando intorno al suo diametro genera il volume della sfera; se ora nel semi-cerchio inscriviamo (fig. 32) i semi-poligoni regolari *ACE, ABCDE,*..... di *n*,

(1) *G. P.*, § XXIV defin. 2.

$2n$,... lati è chiaro che i volumi generati dalla rotazione dei semi-poligoni tenderanno (quando il numero dei loro lati si radoppia indefinitamente) ad un limite che sarà il volume della sfera. Indicando con v_1, v_2, v_3,... i volumi generati da questi semi-poligoni, con a_1, a_2, a_3,... le rispettive apoteme, con s_1, s_2, s_3,... le superficie generate dai loro perimetri, si ha per il teorema precedente

$$v_1 = \frac{1}{3} s_1 a_1, \quad v_2 = \frac{1}{3} s_2 a_2, \quad v_3 = \frac{1}{3} s_3 a_3, \ldots:$$

onde i limiti cui tendono le due serie di quantità

$$v_1, \; v_2, \; v_3, \ldots$$

ed

$$\frac{1}{3} s_1 a_1, \; \frac{1}{3} s_2 a_2, \; \frac{1}{3} s_3 a_3, \ldots$$

saranno eguali. Ma il limite dei volumi v_1, v_2,... è il volume della sfera, il limite della superficie s_1, s_2,... è la superficie sferica, il limite delle apoteme, a_1, a_2,... è il raggio: onde *il volume della sfera è misurato dal terzo del prodotto della superficie sferica per il raggio.*

Corollario 1. Si è trovato che la superficie della sfera di raggio R è misurata da

$$4 \pi R^2,$$

onde il volume V di quella sfera sarà data da

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

2. I volumi di due sfere stanno fra loro come le terze potenze dei raggi.

PARTE TERZA

TRIGONOMETRIA

SEZIONE I.

Le funzioni goniometriche.

§ I. Oggetto della Trigonometria.

Abbiamo visto [1] come sia possibile di tradurre molte proposizioni della Geometria in formole algebriche, e come si abbia così il mezzo di applicare i procedimenti del calcolo alla risoluzione delle questioni geometriche. Però le semplici proposizioni della *Geometria elementare* non permettono di stabilire tali relazioni che leghino algebricamente fra loro i lati e gli angoli di un poligono e in ispecie di un triangolo, benchè sia posto in chiaro che fra tali elementi vi è necessariamente una dipendenza (poichè dati i lati di un triangolo ne risultano determinati gli angoli, perchè al lato maggiore di un triangolo si oppone l'angolo maggiore, ecc.). D'altra parte, la mancanza di queste relazioni costituirebbe una lacuna grave specialmente per le applicazioni della geometria, perchè non si potrebbero risolvere con calcolo quei pro-

(1) V. Introduzione.

blemi che hanno per oggetto di determinare gli elementi incogniti di una figura rettilinea, dati che siano alcuni dei suoi elementi in numero sufficiente, mentre le costruzioni grafiche non dànno in generale nella pratica risultati abbastanza esatti. A questa lacuna della Geometria metrica supplisce la *Trigonometria* il cui oggetto principale è la *risoluzione dei triangoli,* cioè il calcolo degli elementi incogniti di un triangolo di cui siano noti numericamente elementi in numero sufficiente. Però, prima d'intraprendere lo studio della risoluzione dei triangoli, è necessario di definire e di studiare alcune linee o meglio rapporti di linee che stanno in stretta relazione cogli angoli, e che si sostituiscono ad essi nelle formole; ed è ciò che faremo in questa prima sezione. Conviene aggiungere che la *Trigonometria* non ha soltanto l'importanza pratica che le viene dalla risoluzione dei triangoli e conseguentemente di tutte le figure rettilinee, ma giova anche alla teoria, somministrando formole e relazioni che vengono in giuoco in quasi tutte le parti della matematica.

§ II. Determinazione della posizione di un punto mediante numeri.

Dato un punto O fisso sopra una retta indefinita $x'x$, la posizione di un secondo punto M della retta non sarà pienamente determinata se si conosce la sola lunghezza del segmento OM, ma bisogna pure sapere se il punto M si trova

dall'una o dall'altra parte di O [1]. Si suole indicare il senso del segmento a partire da O dicendolo positivo quando è contato in un determinato verso, negativo quando è contato nel verso

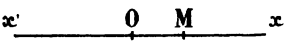

Fig. 33.

opposto, e la posizione del punto M è determinata senza ambiguità da un numero positivo o negativo che rappresenta così il segmento in grandezza od in senso. Ad ogni punto del segmento corrisponde dunque un numero: ed al variare del punto M sulla retta quel numero può passare da valori negativi grandissimi in valore assoluto a valori positivi pure grandissimi, o come si suol dire, da $-\infty$ a $+\infty$.

Analogamente si può fissare la posizione di un punto in un piano. Siano tracciate nel piano due rette (*assi*) $x'x$, $y'y$ segantisi perpendicolarmente nel punto O (*origine*); un punto M del piano è determinato quando si conoscono in lunghezza ed in senso le distanze MQ, MP di esso punto dagli assi, o le loro eguali OP, OQ. Queste distanze si dicono *coordinate* del punto M; QM (ossia OP) si dice pure *ascissa* di M, e PM (ossia OQ) si dice *ordinata*. Il senso di questi segmenti si fissa

[1] Comunemente si dice *a destra* o *a sinistra*, *al disopra* o *al disotto* di O, secondo la disposizione della figura.

ritenendo positive le ascisse contate dall'asse yy' verso destra, negative quelle contate verso sinistra, e positive le ordinate contate dall'asse xx verso l'alto, negative quelle contate dall'asse xx'

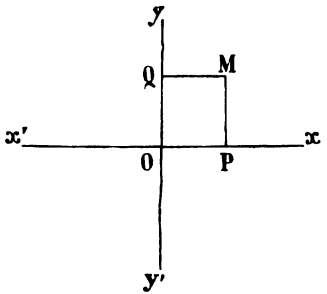

Fig. 34.

verso il basso. Gli assi dividono il piano in quattro angoli retti o quadranti, e per un punto

del 1° quadrante	$\widehat{xoy}$,	l'ascissa è	+	e l'ordinata	+
del 2°	»	$\widehat{yox'}$,	»	—	»	+
del 3°	»	$\widehat{x'oy'}$,	»	—	»	—
del 4°	»	$\widehat{y'ox}$,	»	+	»	—

§ III. Definizione delle funzioni goniometriche.

Abbiasi una retta OR terminata in O ed indefinita verso R (*raggio*) e su cui le lunghezze OM

si riguarderanno sempre come positive; si supponga che questa retta primitivamente adagiata secondo ox venga a ruotare nella direzione della freccia descrivendo l'angolo crescente $\widehat{xoM}$, ed inoltre che la OR dopo essere ritornata in ox alla

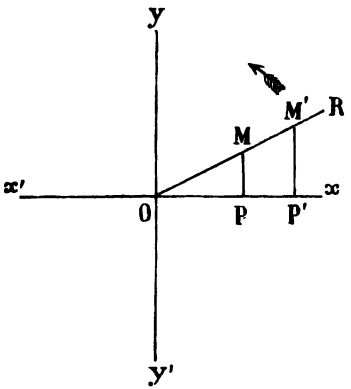

Fig. 35.

fine di un giro, possa continuare a ruotare indefinitamente: talchè l'angolo $\widehat{xoM}$ possa superare quattro angoli retti e diventare grande quanto si vuole, ritenendosi sempre *positivo*. Supponendo che le OR ruoti in senso contrario alla freccia, gli angoli descritti si riterrebbero negativi.

Fatte queste ipotesi, l'angolo andrà considerato come una quantità che può assumere tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$.

Fissiamo un valore dell'angolo xoR e conduciamo le coordinate MP, OP, $M'P'$, OP'... per vari punti del raggio OR; i triangoli simili MOP, $M'OP'$ dànno

$$\frac{MP}{OM}=\frac{M'P'}{OM'},\quad \frac{OP}{OM}=\frac{OP'}{OM'},\quad \frac{MP}{OP}=\frac{M'P'}{OP'},$$

ossia i rapporti

$$\frac{MP}{OM},\ \frac{OP}{OM},\ \frac{MP}{OP}$$

sono *costanti* per tutti i punti di uno stesso raggio OR. È chiaro invece che mutandosi la posizione del raggio, varieranno i valori di quei rapporti, e vedremo in seguito come essi possono servire a definire la posizione del raggio OR. Enunciamo ora le seguenti definizioni:

Definizione 1. Quando due quantità variabili A e B sono talmente legate che ad una variazione arbitraria della prima consegue una determinata variazione della seconda, questa si dice *funzione* dell'altra.

2. Se MP, OP sono l'ordinata e l'ascissa di un punto qualunque M del raggio OR (fig. 35), i rapporti

$$\frac{MP}{OM},\ \frac{OP}{OM},\ \frac{MP}{OP},$$

ed i loro inversi sono funzioni dell'angolo $\widehat{Rox}$ e vengono perciò detti *funzioni goniometriche.*

3. Il rapporto $\frac{MP}{OM}$ si dice *seno*, $\frac{OP}{OM}$ si dice *coseno* ed $\frac{MP}{OP}$ si dice *tangente* dell'angolo $\widehat{Rox}$, i rapporti inversi $\frac{OM}{MP}$, $\frac{OM}{OP}$, $\frac{OP}{MP}$ si dicono rispettivamente *cosecante*, *secante* e *cotangente* dell'angolo stesso.

4. Se si indica con x il valore dell'angolo $\widehat{Rox}$ (espresso per es. in gradi) le sue funzioni goniometriche si denotano rispettivamente con

sen x, cos x, tang x, cosec x, sec x, cotg x.

Ricordando in quali casi (v. il paragrafo precedente) le coordinate di un punto sono positive o negative, e ritenendo OM sempre positivo, possiamo enunciare il

TEOREMA 1. Il seno e la cosecante sono positivi per gli angoli Rox compresi fra 0° e 180°, negativi per quelli compresi fra 180° e 360°.

Il coseno e la secante sono positivi per gli angoli compresi fra 0° e 90°, e fra 270° e 360°, negativi per quelli compresi fra 90° e 270°.

La tangente e la cotangente sono positive per gli angoli compresi fra 0° e 90° e fra 180° e 270°, negative per gli angoli compresi fra 90° e 180° e fra 270° e 360°.

È evidente pure il

TEOREMA 2. Le funzioni goniometriche sono le stesse per due angoli che differiscono di 360° o di un multiplo di 360°, poichè a due angoli che differiscono di 360° corrisponde la stessa posizione del raggio OR.

Ma alla definizione precedente delle funzioni goniometriche, che ne mette in luce la vera natura, si trova vantaggioso molte volte di sostituire un enunciato alquanto diverso. Se sul raggio OR fissiamo un punto M tale che sia $OM = 1$, mentre il raggio eseguirà la sua rotazione il punto M descriverà una circonferenza di centro O e di raggio uguale all'unità, che segherà gli assi nei punti AA', BB': ad un angolo descritto dal raggio OR a partire dalla posizione iniziale ox corri-

sponderà un arco descritto dal punto M a partire dal punto A (che si dirà *principio* degli archi). Si riterranno positivi gli archi descritti nel senso della freccia, negativi quelli descritti in senso opposto, ed il punto M potendo percorrere più volte

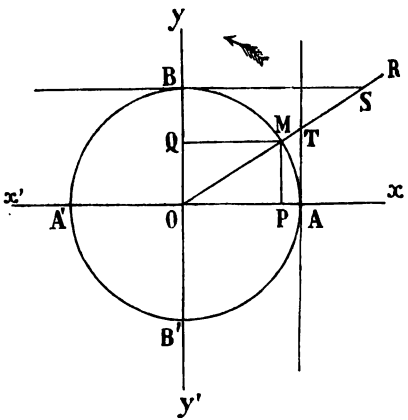

Fig. 36.

la circonferenza, l'arco come l'angolo sarà una grandezza variabile da $-\infty$ a $+\infty$ [1]. Ciò posto,

[1] L'arco si può ritenere valutato in gradi, come l'angolo; oppure espresso come lunghezza, il raggio essendo preso come unità; allora l'intera circonferenza (360°) è misurata dal numero 2π, il quadrante (90°) da $\frac{\pi}{2}$, la semicirconferenza (180°) da π (v. *Geometria metrica*. § VI). Colla lettera x noi indicheremo per ora tanto l'angolo quanto l'arco espressi in gradi.

il seguente teorema ci dà nuove definizioni delle funzioni trigonometriche.

TEOREMA 3. Se si conducono l'ordinata MP di un punto M della circonferenza di raggio 1 e le tangenti in A, B alla circonferenza fino all'incontro col raggio OM in T, S:

a) I numeri che misurano MP, OP, TA saranno rispettivamente il seno, il coseno e la tangente dell'angolo $\widehat{x\,o\,R} = x$ (o dell'arco AM).

b) I numeri che misurano OS, OT, BS ne saranno rispettivamente la cosecante, la secante e la cotangente.

a) Per definizione, il rapporto $\frac{MP}{OM}$ è il seno dell'angolo $\widehat{Rox}$; ma $OM = 1$, onde il seno sarà il numero che misura MP. Per la stessa ragione il coseno è il numero che misura OP. La tangente è data per definizione da

$$\frac{MP}{OP} = \frac{TA}{OA};$$

ma

$$OA = OM = 1,$$

onde

$$\text{tang } x = TA.$$

b) Per definizione, il rapporto $\frac{OM}{MP}$ è la cosecante dell'angolo $\widehat{Rox}$; ma i triangoli simili OMP, OBS danno

$$\frac{OM}{MP} = \frac{OS}{OB};$$

ed essendo

$$OB = 1,$$

ne viene

$$\operatorname{cosec} x = OS.$$

La secante è data dal rapporto $\frac{OM}{OP}$; ma dai triangoli simili OMP, OAT si ha

$$\frac{OM}{OP} = \frac{OT}{OA},$$

ed essendo

$$OA = 1,$$

viene

$$\sec x = OT.$$

Infine la cotangente è definita dal rapporto $\frac{OP}{PM}$ e dai triangoli simili OMP, OBS si ha

$$\frac{OP}{PM} = \frac{BS}{OB},$$

ed essendo

$$OB = 1,$$

viene

$$\operatorname{cotg} x = BS.$$

La dimostrazione precedente fatta per il caso che il punto M sia nel primo quadrante si può ripetere in tutti gli altri casi e le eguaglianze precedenti si mantengono inalterate, sussistendo anche i segni conformemente al teorema 1 e alla convenzione del paragrafo II. Questa convenzione non si applicherebbe alla secante ed alla cosecante come risultano definite dal teorema precedente; ma in tal caso si converrà di dar loro anche nella seconda definizione i segni che risultano dal teorema 1.

La proposizione così dimostrata spiega perchè le *funzioni goniometriche* si dicono anche *funzioni circolari.* Esse sono anche dette talvolta *linee trigonometriche* benchè il loro carattere sia di *rapporti;* vi si sostituiscono segmenti (linee) nel teorema precedente, facendo la convenzione che il cerchio in cui essi segmenti sono descritti abbia per raggio *l'unità.*

§ IV. Angoli ed archi complementari o supplementari.

DEFINIZIONE 1. Due angoli o due archi (di cui uno può anche essere negativo) la cui somma algebrica vale un quadrante (90°) diconsi *complementari.*

2. Due angoli o due archi (di cui uno può anche essere negativo) la cui somma algebrica vale due quadranti (180°) diconsi *supplementari.*

Se x indica un arco od un angolo, $90° - x$ è il suo *complemento* e $180° - x$ il suo *supplemento.*

TEOREMA 1. Il coseno, la cotangente e la cosecante di un arco (angolo) sono il seno, la tangente e la secante dell'arco (angolo) complementare (v. fig. 36).

Si prenda per un istante B come principio degli archi e si contino gli archi positivi da B verso A. L'arco $BM = BA - AM$ è evidentemente complementare di AM; ora abbassata la perpendicolare MQ sul diametro BB' questa sarà in grandezza e segno il seno di BM; così BS ne sarà la tangente ed OS la secante [1]. Ma si

[1] Teorema precedente.

è visto che $OP = MQ$, BS ed OS sono rispettivamente il coseno, la cotangente e la cosecante dell'arco AM: dunque il coseno, la cotangente e la cosecante di un arco sono rispettivamente seno, tangente e secante per l'arco complementare.

Questo teorema si può esprimere colle formole:

$$\text{sen}\ (90^\circ - x) = \cos\ x,$$
$$\text{tang}\ (90^\circ - x) = \text{cotg}\ x,$$
$$\text{sec}\ (90^\circ - x) = \text{cosec}\ x\ (^1).$$

TEOREMA 2. Il seno e la cosecante di un angolo sono eguali a quelli dell'angolo supplementare; le altre funzioni goniometriche di un angolo sono eguali e di segno contrario a quelle dell'angolo supplementare.

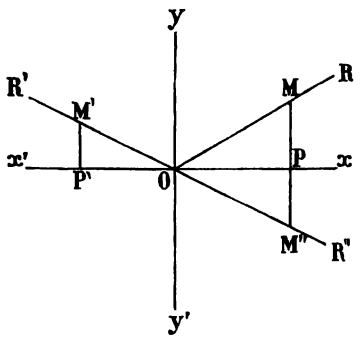

Fig. 37.

Si tiri il raggio OR' tale che $\widehat{R'ox'} = \widehat{Rox}$;

(1) Questo teorema spiega i nomi di *coseno, cotangente* e *cosecante* i quali stanno a significare *seno, tangente* e *secante* dell'angolo *complementare.*

gli angoli $\widehat{Rox}$ ed $\widehat{R'ox}$ sono evidentemente supplementari. Ora condotte le ordinate MP, $M'P'$ di un punto M di OR e di un punto M' di OR', i triangoli simili OMP, $OM'P'$ dànno in valori assoluti:

$$\frac{MP}{OM}=\frac{M'P'}{OM'},\ \frac{OP}{OM}=\frac{OP'}{OM'},\ \frac{MP}{OP}=\frac{M'P'}{OP'};$$

ma (§ II). MP, $M'P'$ hanno eguali segni mentre OP, OP' hanno segni contrari; dunque il seno e quindi la cosecante sono gli stessi nell'angolo $\widehat{Rox}$ e nel suo supplementare, mentre le altre funzioni sono eguali e di segno contrario.

Questo teorema si esprime colle formole:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(180^\circ - x), &&\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec}(180^\circ - x)\\
&\cos x = -\cos(180^\circ - x), &&\sec x = -\sec(180^\circ - x)\\
&\operatorname{tang} x = -\operatorname{tang}(180^\circ - x), &&\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg}(180' - x)
\end{aligned}$$

Costruendo l'angolo xoR'' eguale e di segno contrario ad Rox, risulta immediatamente dalla figura il

TEOREMA 3. Il coseno e la secante di due angoli eguali e di segno contrario sono eguali, le altre funzioni goniometriche sono eguali e di segno contrario,

che si può esprimere colle formole

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, &&\operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x,\\
&\cos(-x) = \cos x, &&\sec(-x) = \sec x,\\
&\operatorname{tang}(-x) = -\operatorname{tang} x, &&\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x.
\end{aligned}$$

§ V. Variazioni delle funzioni goniometriche.

Per studiare più facilmente le variazioni delle funzioni goniometriche al variare dell'arco od angolo corrispondente, ci riferiremo alla definizione delle medesime date dal teor. 3 del § III.

Seno. Il seno di un arco (angolo) piccolissimo è pure piccolissimo ed è nullo se l'arco è nullo. Al crescere dell'arco e finchè questo si mantiene nel primo quadrante, cresce anche il seno, e quando l'estremo variabile M dell'arco viene in B, il seno è OB ossia l'unità. Si scrive pertanto

$$\text{sen } 0^\circ = 0, \quad \text{sen } 90^\circ = 1.$$

Quando l'estremo M dell'arco passa nel secondo quadrante e l'arco cresce da 90° a 180°, il seno decresce da 1 a 0 mantenendosi sempre positivo; quando l'estremo M passa nel terzo quadrante e l'arco varia da 180° a 270°, il seno diventa negativo (§ II) e decresce (cresce in valore assoluto) da 0 a -1. Infine nel quarto quadrante l'arco variando da 270° a 360°, il seno rimane negativo e cresce da -1 a 0. I valori del seno sono dunque sempre compresi fra gli estremi -1 e $+1$. Come si è detto, l'arco potrebbe continuare a crescere ed oltrepassare una intera circonferenza, ma il valore del seno per l'arco $360^\circ + x$ essendo eguale al seno dell'arco x [1], o, come si suole dire, il seno essendo una

[1] § III, teor. 2.

funzione periodica dell'arco, col periodo di 360°, non si avrebbe nulla di nuovo da aggiungere sulla variazione del seno.

Tangente. La tangente di un arco piccolissimo è piccolissima e la tangente dell'arco nullo è nulla. Al crescere dell'arco cresce la tangente e diventa grandissima quando l'arco è vicinissimo ai 90°. Se l'arco raggiunge i 45°, il triangolo OAT (fig. 36) è isoscele, e

$$\text{tang } 45^\circ = 1\,;$$

la tangente è dunque minore dell'unità per angoli minori di 45°, e maggiore dell'unità per gli angoli da 45° a 90°. L'arco di 90° non ha propriamente tangente, ma sarà possibile prendere un arco minore, tanto vicino ai 90°, che la sua tangente superi qualunque quantità assegnata: ciò si esprime in linguaggio abbreviato dicendo che la tangente di 90° è *infinita*. Si può scrivere, indicando con ε una quantità positiva:

$$\lim_{\text{per } \varepsilon = o} \text{tang } (90^\circ - \varepsilon) = \infty.$$

Quando l'estremo mobile M dell'arco oltrepassa di poco il punto B, la tangente pur rimanendo grandissima in valore assoluto è diventata negativa, e si può scrivere, ε indicando ancora una quantità positiva,

$$\lim_{\text{per } \varepsilon = o} \text{tang } (90^\circ + \varepsilon) = -\infty.$$

Al crescere dell'arco da 90° a 180° la tangente rimane sempre negativa e cresce da $-\infty$ a 0 (decresce in valore assoluto). Quando l'arco continua a crescere da 180° a 360°, la figura ci mostra che la tangente riprende i valori assunti da 0 a 180°, essendo

$$\text{tang}\ (180^\circ + x) = \text{tang}\ x,$$

cioè la tangente è una funzione periodica dell'arco, col periodo di 180°.

Coseno. Il coseno di un arco piccolissimo è vicinissimo ad OA ossia all'unità, ed il coseno dell'arco nullo è l'unità. Al crescere dell'arco decresce il coseno e diventa zero quando l'arco raggiunge i 90°. Nel secondo quadrante il coseno diventa negativo e decresce da 0 a -1, mentre l'arco cresce da 90° a 180°; nel terzo quadrante il coseno rimane negativo e cresce da -1 a 0, mentre l'arco cresce da 180° a 270°; infine quando l'arco cresce da 270° a 360° il coseno diventa positivo e cresce da 0 ad 1.

La cosecante, la cotangente e la secante essendo rispettivamente le inverse [1] del seno, tangente e coseno, le loro variazioni si deducono immediatamente dalle variazioni di queste. Le variazioni delle sei funzioni goniometriche sono riassunte nella seguente tabella:

---

[1] § II, defin. 3.

ARCO	SENO	COSENO	TANGENTE	COSECANTE	SECANTE	COTANGENTE
0	0	1	0	$+\infty$	1	$+\infty$
	+, cresc.	+, decresc.	+, cresc.	+, decresc.	+, cresc.	+, decresc.
90°	1	0	$\begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$	1	$\begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$	0
	+, decresc.	−, decresc.	−, cresc.	+, cresc.	−, cresc.	−, decresc.
180°	0	-1	0	$\begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$	-1	$\begin{cases} -\infty \\ +\infty \end{cases}$
	−, decresc.	−, cresc.	+, cresc.	−, cresc.	−, decresc.	+, decresc.
270°	-1	0	$\begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$	-1	$\begin{cases} -\infty \\ +\infty \end{cases}$	0
	−, cresc.	+, cresc.	−, cresc.	−, decresc.	+, decresc.	−, decresc.
360°	0	1	0	$-\infty$	1	$-\infty$

§ VI. Archi aventi una stessa linea trigonometrica.

a) Se dal punto M della circonferenza di raggio 1 si conduce la parallela all'asse xx' si otterrà sulla circonferenza un secondo punto M' avente la stessa ordinata di M, ossia gli archi

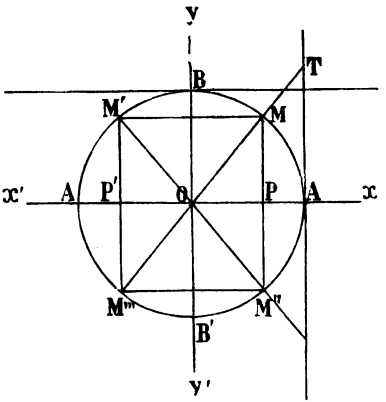

Fig. 38.

che hanno il termine in M od M' hanno lo stesso seno. Ma detto x l'arco AM, AM' sarà $180° - x$ ed in M termineranno gli archi compresi nella formola [1]

$$m \,.\, 360° + x \qquad (1)$$

[1] § II, teor. 2.

(m intero) ed in M' gli archi dati dalla formola

$$m \,.\, 360^\circ + 180^\circ - x,$$

ovvero

$$(2\,m + 1)\,180^\circ - x\,; \qquad (2)$$

le formole (1) e (2) ci dànno tutti gli archi aventi il medesimo seno, e quelli soltanto.

b) Dallo stesso punto M si tiri la parallela all'asse yy'; si ottiene sulla circonferenza un secondo punto M'' avente la stessa ascissa di M ed è chiaro che gli archi terminati in M ed M'' hanno lo stesso coseno. Ma detto x l'arco AM, AM'' sarà $360^\circ - x$ ed in M termineranno gli angoli compresi nella formola

$$m \,.\, 360^\circ + x,$$

in M'' gli angoli compresi nella formola

$$m \,.\, 360^\circ - x,$$

e la formola

$$m \,.\, 360^\circ \pm x \qquad (3)$$

ci darà tutti ed i soli archi aventi uno stesso coseno.

c) Dal punto M si tiri il diametro MM'''; gli archi terminati in M ed M''' hanno la medesima tangente, ma detto x l'arco AM, gli archi aventi per estremi M ed M''' sono

$$m \,.\, 360^\circ + x,$$

ed

$$m \,.\, 360^\circ + 180^\circ + x$$

e questi si possono compendiare nella formula

$$m \,.\, 180^0 + x, \qquad (4)$$

che ci dà tutti ed i soli archi aventi una stessa tangente.

Essendo per definizione la cosecante, la secante e la contangente le inverse del seno, del coseno e della tangente, le formole (1) e (2) rappresentano tutti gli archi aventi la stessa cosecante, (3) tutti gli archi aventi la stessa secante e (4) tutti quelli aventi la stessa cotangente.

Si osservi che gli archi terminati nei quattro punti (vertici di un rettangolo inscritto) M, M', M'', M''', hanno le loro funzioni goniometriche eguali in valore assoluto e differenti al più per il segno.

§ VII. **Relazioni fra le sei funzioni goniometriche.**

Fra le sei funzioni goniometriche debbono necessariamente passare delle relazioni, poichè le formole del paragrafo precedente dimostrano che data una delle sei linee l'arco corrispondente può terminare in soli due punti della circonferenza, e che per conseguenza le altre funzioni goniometriche sono determinate, all'infuori del segno. Poichè i valori assoluti delle funzioni trigonometriche sono determinati tosto che sia assegnato il valore di una di esse, sarà necessario che le equazioni che le legano siano in numero di *cinque* distinte; difatti, se fossero quattro si dovrebbero assegnare valori arbitrari

a *due* delle funzioni per potere determinare le altre, e se fossero *sei* (indipendenti) si potrebbe da esse equazioni ricavare valori determinati per le sei funzioni qualunque sia l'arco, il che è assurdo, poichè le dette funzioni sono essenzialmente variabili al variare dell'arco. Le cinque relazioni si trovano facilmente come segue.

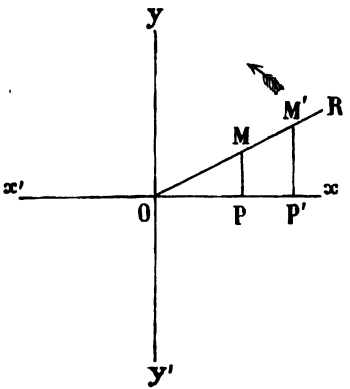

Fig. 39.

Se M è un punto preso sul lato OR dell'angolo $Rox = x$, si ha [1]

$$\text{sen}\, x = \frac{MP}{OM}, \quad \cos x = \frac{OP}{OM}, \quad \text{tang}\, x = \frac{MP}{OP}.$$

[1] § II, defin. 3.

Quadrando e sommando le due prime, viene

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = \frac{\overline{MP}^2 + \overline{OP}^2}{\overline{OM}^2}$$

e poichè per il teorema di Pitagora

$$\overline{MP}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2,$$

si ottiene:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1. \qquad (1)$$

Dividendo membro a membro le due prime e confrontando il risultato colla terza, si ha

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tang} x. \qquad (2)$$

Infine le definizioni 3 del § II dànno

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \qquad (3)$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad (4)$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tang} x}. \qquad (5)$$

A queste cinque relazioni distinte se ne possono aggiungere altre, che sono però semplici conseguenze delle prime. Per esempio sommando le eguaglianze

$$\operatorname{tang}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}, \qquad 1 = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

e tenendo conto della (1), viene

$$\operatorname{tang}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x, \qquad (6)$$

e similmente si troverebbe

$$\operatorname{cotg}^2 x + 1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x. \qquad (7)$$

Le formole precedenti possono servire a calcolare i valori delle funzioni goniometriche di un angolo, data che sia una di esse. Come esempio, sia dato il valore a della tangente di un angolo x; viene dalla (5)

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{a},$$

e dalla (6)

$$\sec x = \pm \sqrt{1 + a^2}$$

onde

$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}},$$

finalmente dalla (7)

$$\operatorname{cosec} x = \pm \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} = \pm \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a}$$

onde

$$\operatorname{sen} x = \pm \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Data la tangente, l'arco può terminare in due punti come M ed M''' (v. fig. 38); ciò spiega come le sue linee trigonometriche, ad eccezione della cotangente, siano determinate in grandezza, ma non in segno.

§ VIII. Teorema d'Addizione per le funzioni goniometriche.

TEOREMA. Il seno ed il coseno dell'angolo $a+b$ si deduce dai seni e coseni degli angoli a e b mediante le formole

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen}\,(a+b)=\text{sen}\,a\cos b+\cos a\,\text{sen}\,b,\\ \cos(a+b)=\cos a\cos b-\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b.\end{array}\right\}\quad(\alpha)$$

a) Abbiansi dapprima gli angoli $a=\widehat{xOR}$,

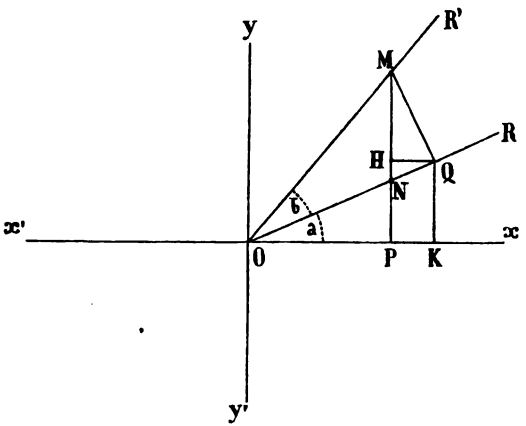

Fig. 40.

$b=\widehat{ROR'}$ ambedue minori di 90° e la cui somma sia pure minore di 90°. Prendendo OR come lato

iniziale dell'angolo $\widehat{ROR'}$ ed abbassando da un punto M della OR' le ordinate MNP sulla Ox, MQ sulla OR, si avrà per definizione:

$$\left.\begin{aligned} \frac{NP}{NO} &= \operatorname{sen} a, \quad \frac{OP}{ON} = \cos a, \\ \frac{MQ}{OM} &= \operatorname{sen} b, \quad \frac{OQ}{OM} = \cos b, \\ \frac{MP}{OM} &= \operatorname{sen}(a+b), \quad \frac{OP}{OM} = \cos(a+b). \end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

Si tiri la QH parallela e la QK perpendicolare ad OK; i triangoli MHQ, NOP sono simili come aventi i lati rispettivamente perpendicolari e dànno

$$\frac{MQ}{ON} = \frac{MH}{OP} = \frac{HQ}{NP},$$

onde

$$ON \,.\, MH = MQ \,.\, OP \qquad (1)$$

$$HQ \,.\, ON = MQ \,.\, NP; \qquad (2)$$

i triangoli ONP, OQK pure simili dànno

$$\frac{QK\,(=PH)}{NP} = \frac{OQ}{ON} = \frac{OK}{OP}$$

onde

$$ON \,.\, PH = OQ \,.\, NP \qquad (3)$$

$$ON \,.\, OK = OQ \,.\, OP; \qquad (4)$$

sommando (1) e (3) e sottraendo (2) da (4), viene

$$ON \,.\, MP = MQ \,.\, OP + OQ \,.\, NP$$

e

$$ON \,.\, OP = OQ \,.\, OP - MQ \,.\, NP$$

e dividendo per $OM \,.\, ON$

$$\frac{MP}{OM} = \frac{MQ}{OM} \cdot \frac{OP}{ON} + \frac{OQ}{OM} \cdot \frac{NP}{NO},$$

$$\frac{OP}{OM} = \frac{OQ}{OM} \cdot \frac{OP}{ON} - \frac{MQ}{OM} \cdot \frac{NP}{ON},$$

e sostituendo per questi rapporti i loro valori (β) viene finalmente

$$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a \cos b + \cos a\,\text{sen}\,b,$$

$$\cos\,(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b,$$

c. d. d.

b) Abbiansi ora due angoli a e b minori ancora di 90°, ma la cui somma sia maggiore di 90°. Poniamo

$$a' = 90^\circ - a, \qquad b' = 90^\circ - b;$$

gli archi a' e b' saranno minori ancora di 90° e sarà pure minore di 90° loro somma

$$a' + b' = 180^\circ - (a+b);$$

agli angoli a' e b' si potrà dunque applicare la formola (α) per il caso precedente e si avrà:

$$\text{sen}\,(a'+b') = \text{sen}\,a' \cos b' + \cos a'\,\text{sen}\,b'$$

$$\cos\,(a'+b') = \cos a' \cos b' - \text{sen}\,a'\,\text{sen}\,b';$$

ma si ha [1]

$$\operatorname{sen} a' = \operatorname{sen}(90^\circ - a) = \cos a,$$

e

$$\cos a' = \cos(90^\circ - a) = \operatorname{sen} a,$$

onde

$$\operatorname{sen}(a' + b') = \cos a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a \cos b$$

$$\cos(a' + b') = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b - \cos a \cos b.$$

Ma sappiamo [2] che

$$\operatorname{sen}(a' + b') = \operatorname{sen}[180^\circ - (a + b)] = \operatorname{sen}(a + b),$$

$$\cos(a' + b') = \cos[180^\circ - (a + b)] = -\cos(a + b);$$

sostituendo questi valori nelle formole precedenti, e cambiando segno ai due membri della seconda di esse, si ottengono precisamente le formole (α) che si volevano dimostrare.

c) Se le formole (α) valgono per gli angoli a e b, esse varranno anche per questi angoli aumentati di un multiplo qualunque di 90°.

Basterà dimostrare che le formole valgono ancora se uno degli angoli (per es. a) si aumenta una volta di 90°. Sia dunque

$$a' = a + 90^\circ,$$

donde

$$a = a' - 90^\circ,$$

applicando agli angoli a e b le formole (α), valide

(1) § IV, teor. 1.
(2) § IV, teor. 2.

per ipotesi, si ha:

$$\operatorname{sen}(a' - 90^\circ + b) =$$
$$= \operatorname{sen}(a' - 90^\circ)\cos b + \operatorname{sen} b \cos(a' - 90^\circ),$$

$$\cos(a' - 90^\circ + b) =$$
$$= \cos(a' - 90^\circ)\cos b - \operatorname{sen}(a' - 90^\circ)\operatorname{sen} b;$$

ma si ha [1]

$$\operatorname{sen}(a' - 90^\circ + b) = \operatorname{sen}[-(90^\circ - a' - b)] =$$
$$= -\operatorname{sen}(90^\circ - a' - b) = -\cos(a' + b),$$

$$\cos(a' - 90^\circ + b) = \cos[-(90^\circ - a' - b)] =$$
$$= \cos(90^\circ - a' - b) = \operatorname{sen}(a' + b),$$

e parimenti

$$\operatorname{sen}(a' - 90^\circ) = -\cos a', \quad \cos(a' - 90^\circ) = \operatorname{sen} a';$$

onde sostituendo nelle precedenti:

$$-\cos(a' + b) = -\cos a' \cos b + \operatorname{sen} a' \operatorname{sen} b,$$
$$\operatorname{sen}(a' + b) = \operatorname{sen} a' \cos b + \cos a' \operatorname{sen} b;$$

ossia le formole (α) valide per a e b, si conservano valide anche per $a + 90^\circ$ e b.

Da ciò risulta immediatamente che le dette formole valgono per angoli a e b grandi quanto si vuole: questi angoli si possono infatti sempre scrivere

$$a = m \,.\, 90^\circ + a', \qquad b = n \,.\, 90^\circ + b'$$

dove a' e b' sono minori di 90°: e le formole (α)

(1) § IV, teor. 1 e 3.

valide per questi ultimi, varranno anche per gli angoli a' e b' aumentati rispettivamente di m volte ed n volte 90°, cioè per gli angoli a e b.

d) Infine gli angoli a e b possono anche essere negativi; in tal caso infatti si possono aumentare di tante volte 360° da ridurli positivi, e sappiamo d'altronde che con ciò le funzioni trigonometriche degli angoli non si mutano.

Corollario 1. Le formole precedenti permettono di calcolare il seno ed il coseno di $a+b$, conoscendo i seni e coseni di a e b; applicando le stesse formole ad $a+b+c$, si esprimeranno prima il seno e coseno di $a+b+c$ per i seni e coseni di $a+b$ e di c, e tenendo conto nuovamente delle formole (α), si potranno esprimere il seno e coseno di $a+b+c$ per i seni e coseni di a, b e c. In simil modo si potranno esprimere il seno ed il coseno della somma di un numero qualunque di angoli per i seni e coseni degli angoli addendi.

2. Si ha [1]

$$\operatorname{tang}(a+b)=\frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)}$$

e tenendo conto delle (α)

$$\operatorname{tang}(a+b)=\frac{\operatorname{sen} a\cos b+\operatorname{sen} b\cos a}{\cos a\cos b-\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b}.$$

Dividendo i due termini di questa espressione frazionaria per il prodotto $\cos a \,.\, \cos b$ e tenendo

(1) § VII, formola (2).

conto nuovamente della formola (2) del § VIII, viene:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}(a+b) &= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a} + \dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a}\,\dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}} = \\ &= \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b} \end{aligned}\right\} \quad (\gamma)$$

3. Cambiando b in $-b$ nelle formole (α) e (γ) e ricordando il teorema 3 del § IV, viene

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{aligned}\right\} \quad (\delta)$$

$$\operatorname{tang}(a-b) = \frac{\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b}{1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}, \quad (\varepsilon)$$

formole di *sottrazione* per le più importanti funzioni goniometriche.

4. Sommando e sottraendo membro a membro le (α) e le (δ), la prima colla prima e la seconda colla seconda, si ottengono le formole:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) &= 2 \operatorname{sen} a \cos b \\ \operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) &= 2 \cos a \operatorname{sen} b \\ \cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2 \cos a \cos b \\ \cos(a+b) - \cos(a-b) &= -2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b. \end{aligned}\right\} \quad (\zeta)$$

che servono a trasformare somme e differenze di seni e coseni in prodotti. Se infatti poniamo

$$a + b = x, \qquad a - b = y,$$

donde (*Manuale d'Algebra*, § 64)

$$a = \frac{x+y}{2}, \quad b = \frac{x-y}{2}$$

si trova

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y &= 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\
\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y &= 2 \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \\
\cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\
\cos x - \cos y &= -2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}
\end{aligned}\right\} \quad (n)$$

Dividendo membro a membro le prime due e ricordando la (2) del § VII:

$$\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y} = \frac{\operatorname{tang} \frac{x+y}{2}}{\operatorname{tang} \frac{x-y}{2}} \qquad (9)$$

che avremo occasione di usare in seguito.

§ IX. **Formole per la moltiplicazione degli angoli.**

PROBLEMA. Date le funzioni goniometriche di un angolo, trovare le funzioni goniometriche dei suoi multipli.

Questo problema si può sciogliere con processo ricorrente: cioè conosciute le linee trigono-

metriche dell'angolo a e trovate quelle dell'angolo multiplo ma, si trovano le linee trigonometriche del multiplo seguente $(m+1)a$ mediante le formole d'addizione

$$\text{sen}\,(m+1)\,a = \text{sen}\,(m\,a + a) =$$
$$= \text{sen}\,m\,a \cos a + \cos m\,a\,\text{sen}\,a,$$

e così di seguito. Per il caso di $m=2$, basta fare $a=b$ nelle formole (α) e (γ) del paragrafo precedente, e si trova:

$$\text{sen}\,2\,a = 2\,\text{sen}\,a \cos a, \qquad (1)$$
$$\cos 2\,a = \cos^2 a - \text{sen}^2\,a, \qquad (2)$$
$$\text{tang}\,2\,a = \frac{2\,\text{tang}\,a}{1 - \text{tang}^2\,a} \qquad (3)$$

che servono a calcolare il seno, il coseno e la tangente dell'angolo doppio conoscendo queste funzioni relative all'angolo semplice.

Per calcolare $\text{sen}\,3\,a$ e $\cos 3\,a$, si applicherà nuovamente la formola d'addizione

$$\text{sen}\,3\,a = \text{sen}\,(2\,a + a) = \cos 2\,a\,\text{sen}\,a + \text{sen}\,2\,a \cos a,$$
$$\cos 3\,a = \cos\,(2\,a + a) = \cos 2\,a \cos a - \text{sen}\,2\,a\,\text{sen}\,a,$$

e ponendo per $\text{sen}\,2\,a$, $\cos 2\,a$ i valori (1) e (2) e riducendo,

$$\text{sen}\,3\,a = 3\,\text{sen}\,a \cos^2 a - \text{sen}^3\,a,$$
$$\cos 3\,a = \cos^3 a - 3\,\text{sen}^2\,a \cos a.$$

Si è trovato (§ VII, formola 1):

$$1 = \text{sen}^2\,a + \cos^2 a;$$

sommando questa formola colla (2) viene

$$\cos 2a + 1 = 2\cos^2 a, \tag{4}$$

onde

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \tag{4'}$$

e sottraendo da quella stessa formola la (2),

$$1 - \cos 2a = 2\,\mathrm{sen}^2 a, \tag{5}$$

onde

$$\cos 2a = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2 a, \tag{5'}$$

che sono di uso frequente.

§ X. Formole per la bisezione degli angoli.

PROBLEMA. Date le funzioni goniometriche di un angolo, trovare le funzioni goniometriche della metà di quest'angolo.

a) Nelle formole (1) e (2) del paragrafo precedente si cangi a in $\frac{a}{2}$, e viene

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{sen}\, a &= 2\,\mathrm{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} \\ \cos a &= \cos^2\frac{a}{2} - \mathrm{sen}^2\frac{a}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Queste eguaglianze si possono considerare come due equazioni fra le due incognite $\mathrm{sen}\,\frac{a}{2}$ e $\cos\frac{a}{2}$, $\mathrm{sen}\, a$ e $\cos a$ essendo cogniti. Ma la risoluzione di questo sistema si semplifica tenendo conto della

relazione (1) del § VII; si ha infatti:

$$1 = \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2}$$

e sommando e sottraendo colla prima delle (1), viene

$$1 + \operatorname{sen} a = \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} + 2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2},$$

$$1 - \operatorname{sen} a = \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} - 2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2},$$

onde

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} &= \pm \sqrt{1 + \operatorname{sen} a} \\ \operatorname{sen} \frac{a}{2} - \cos \frac{a}{2} &= \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen} a} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

e conoscendosi la somma e la differenza delle due incognite sen $\frac{a}{2}$ e cos $\frac{a}{2}$, queste sono date da [1]:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{a}{2} &= \frac{1}{2} \left\{ \pm \sqrt{1 + \operatorname{sen} a} \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen} a} \right\} \\ \operatorname{sen} \frac{a}{2} &= \frac{1}{2} \left\{ \pm \sqrt{1 + \operatorname{sen} a} \mp \sqrt{1 - \operatorname{sen} a} \right\}. \end{aligned}\right\} (3)$$

In queste formule vanno presi insieme o i segni superiori o gl'inferiori.

---

(1) *Manuale d'Algebra*, § 64.

La moltiplicità di valori per sen $\frac{a}{2}$ e cos $\frac{a}{2}$, dato che sia sen a, si spiega osservando che, dato il seno, l'arco corrispondente (fig. 38) può terminare sia nel punto M, sia nel punto M'; l'arco $\frac{a}{2}$ potrà dunque essere la metà di AM, o di $360° + AM$ o la metà di AM', o di $360° + AM'$ e si avranno così quattro punti della circonferenza in cui può terminare $\frac{a}{2}$ e quindi quattro combinazioni di valori per sen $\frac{a}{2}$ e cos $\frac{a}{2}$.

b) Se nelle formule (4) e (5) del paragrafo precedente si pone $\frac{a}{2}$ al posto di a, viene

$$2\cos^2\frac{a}{2} = 1 + \cos a, \quad 2\,\mathrm{sen}^2\frac{a}{2} = 1 - \cos a,$$

onde

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}, \mathrm{sen}\,\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \quad (4)$$

che dànno i valori di sen $\frac{a}{2}$ e cos $\frac{a}{2}$ espressi per il solo coseno dell'angolo a.

c) Si ponga ancora $\frac{a}{2}$ al posto di a nella formola (3) del paragrafo precedente, e si ottiene:

$$\mathrm{tang}\,a = \frac{2\,\mathrm{tang}\frac{a}{2}}{1 - \mathrm{tang}^2\frac{a}{2}}$$

che si può scrivere:

$$\operatorname{tang} a \operatorname{tang}^2 \frac{a}{2} + 2 \operatorname{tang} \frac{a}{2} - \operatorname{tang} a = o$$

e risolvendo questa equazione di secondo grado rispetto all'incognita tang $\frac{a}{2}$, si ottiene [1]:

$$\operatorname{tang} \frac{a}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 a}}{\operatorname{tang} a}.$$

Il doppio valore che si trova per tang $\frac{a}{2}$, data che sia tang a, si spiega osservando che data la tangente, l'arco corrispondente può ammettere i valori espressi dalla formola

$$m.\,180^\circ + a;$$

le metà di questi archi ammettono pertanto i valori compresi nella formola

$$m.\,90^\circ + \frac{a}{2},$$

i quali hanno due tangenti distinte, che sono quelle di $\frac{a}{2}$ e di $90^\circ + \frac{a}{2}$.

---

(1) *Manuale d'Algebra,* § 64.

§ XI. Cenno sulla disposizione e l'uso delle tavole trigonometriche.

In tutte le questioni che si trattano col sussidio della trigonometria ed in ispecie nei problemi di risoluzione delle figure rettilinee, gli angoli non compariscono mai direttamente nelle formole, bensì per mezzo delle loro funzioni goniometriche; mentre sia nei dati, sia nei risultati di tali problemi figurano i valori degli angoli stessi, espressi ordinariamente coll'unità *grado*. Si presentano dunque da risolvere i seguenti problemi:

a) dato il valore numerico di un angolo, trovare i valori delle sue funzioni goniometriche;

b) data una delle funzioni goniometriche, assegnare il valore degli angoli corrispondenti, e a tale uopo basta (per le formole del § VI) assegnare il valore del minimo di essi angoli.

La risoluzione teoretica di questi problemi esce dal campo della matematica elementare; è solo col sussidio dell'analisi algebrica che si possono stabilire delle formole che esprimono le linee trigonometriche per mezzo (o come suol dirsi, *in funzione*) dell'angolo ed inversamente, e che permettono quindi di risolvere i problemi suaccennati. Per le applicazioni numeriche, si dovrebbe, in ogni caso speciale, applicare quelle formole; però, onde risparmiare calcoli laboriosi da ripetersi ad ogni nuova applicazione numerica della trigonometria, si è pensato di eseguire questi calcoli una volta per sempre e di consegnarne i risultati nelle cosidette *Tavole Trigonometriche*. — Queste ta-

vole constano di più colonne; nella prima si trovano scritti gli angoli da 0 a 90°, ad intervalli i più ristretti che sia possibile (ordinariamente di dieci in dieci minuti secondi) e di fronte a questi nelle altre colonne si dovrebbero trovare i valori delle rispettive funzioni trigonometriche. Osserviamo però che i valori delle linee trigonometriche corrispondenti ad angoli multipli di 10″ sono generalmente incommensurabili ed è quindi necessario di limitarsi ad esprimerli nelle tavole in forma di frazioni decimali, con tale approssimazione che basti per la massima parte dei casi pratici; ma tutte le formole per la risoluzione dei triangoli potendosi ridurre a contenere sole moltiplicazioni o divisioni di funzioni trigonometriche (1), vi si potrà applicare il calcolo logaritmico; per tale ragione ed allo scopo di abbreviare i calcoli si è trovato opportuno di inscrivere nelle tavole non i valori delle funzioni goniometriche, bensì quelli dei loro logaritmi.

Le tavole servono anche a trovare i logaritmi degli angoli non inscritti nelle tavole stesse, potendosi ammettere senza errore sensibile che entro limiti abbastanza ristretti le variazioni dei logaritmi delle funzioni goniometriche sono proporzionali alle variazioni dell'angolo (2).

---

(1) Le formole del § VIII (ζ), permettono di ridurre le addizioni e sottrazioni di seni e coseni a moltiplicazioni ossia rendono le somme e differenze di seni e coseni *calcolabili per logaritmi.*

(2) L'errore diventerebbe sensibile se l'angolo fosse molto piccolo, epperò nelle migliori tavole si trovano le linee trigonometriche degli angoli da 0 a 5°, di secondo in secondo.

Basterebbero tavole calcolate per i soli seni e coseni: infatti essendo

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x},$$

se ne deduce, prendendo i logaritmi

$$\log \operatorname{cosec} x = -\log \operatorname{sen} x,$$
$$\log \sec x = -\log \cos x$$

onde basta cangiare il segno ai logaritmi dei seni e coseni per aver quelli delle secanti e consecanti. Inoltre dalla formola

$$\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

si deduce

$$\log \operatorname{tang} x = \log \operatorname{sen} x - \log \cos x,$$

ed i logaritmi delle tangenti si possono ricavare con una semplice sottrazione da quelli dei seni e coseni.

Però le tavole trigonometriche contengono ordinariamente anche i logaritmi delle tangenti e cotangenti da 0 a 45°. Infine essendo

$$\operatorname{sen}(90^\circ - x) = \cos x,$$

onde

$$\operatorname{sen}(45^\circ - x) = \cos(45^\circ + x),$$

e similmente

$$\cos(45^\circ - x) = \operatorname{sen}(45^\circ + x),$$

si vede come bastino tavole contenente gli angoli da 0 a 45° invece che da 0 o 90°.

I seni e coseni di tutti gli archi e le tangenti degli archi minori di 45° essendo minori dell'unità, i loro logaritmi avranno la caratteristica negativa.

Alcuni autori di tavole hanno stimato conveniente di schivare le caratteristiche negative aumentandole tutte di 10 unità, e scrivendo p. es. 8,997821 invece di $\overline{2}$,997721; i logaritmi si dicono allora *a caratteristica alterata* od *aumentata.*

§ XII. Funzioni trigonometriche di alcuni triangoli.

Nel paragrafo precedente abbiamo accennato all'esistenza di formole che esprimono i valori delle singole funzioni goniometriche in funzione del valore dell'angolo, ma il piano di questo libriccino ci vieta di entrare in maggiori particolari su questo argomento, e ci limiteremo a mostrare come per alcuni angoli particolari sia possibile di calcolare direttamente ed in modo semplicissimo i valori delle funzioni goniometriche, e quindi dedurre per mezzo delle formole di moltiplicazione e bisezione, i valori delle funzioni stesse per vari altri angoli, multipli o summultipli dei primi.

a) Sia dapprima $\widehat{Rox}$ un angolo di 45°. Condotta l'ordinata MP di un punto M del lato OR si formerà un triangolo rettangolo MOP in cui essendo l'angolo $\widehat{MOP}$ di 45°, anche OMP sarà

di 45°; il triangolo MOP sarà dunque isoscele ed

$$MP = OP;$$

si ha dunque

$$\text{tang } 45^\circ = \frac{MP}{OP} = 1.$$

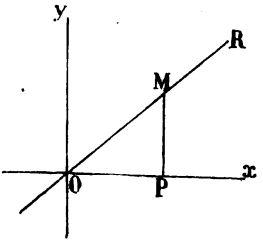

Fig. 41.

Si ha inoltre per il teorema di Pitagora:

$$\overline{MP}^2 + \overline{OP}^2 = 2\,\overline{MP}^2 = 2\,\overline{OP}^2 = \overline{OM}^2$$

onde

$$OP = MP = \frac{OM}{\sqrt{2}}$$

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{MP}{OM} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{OP}{OM} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Da questi valori si deduce mediante le formole di bisezione (§ X, formola 4) e dando al radicale il segno + perchè si tratta di angoli acuti:

$$\text{sen } 22^\circ, 30' = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2},$$

$$\cos 22^\circ, 30' = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2},$$

da cui (§ VII, formola 2)

$$\text{tang. } 22^\circ, 30' = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}}$$

o moltiplicando per $(2 - \sqrt{2}) \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ i due termini della frazione e riducendo

$$\text{tang. } 22^\circ\, 30' = \sqrt{2} - 1.$$

Con ripetute applicazioni delle formole di bisezione si potrebbero calcolare in modo analogo le funzioni goniometriche degli angoli compresi nella formola $\frac{90^\circ}{2^m}$.

b) Sia $\widehat{Rox}$ un angolo di 60°; se MP è la ordinata di un punto M del lato OR si avrà

$$\widehat{OMP} = 30^\circ,$$

e facendo in M un angolo $\widehat{PMQ} = 30°$ il triangolo OMQ sarà equilatero ed OP sarà metà di MO; onde

$$\cos 60° = \frac{OP}{OM} = \frac{1}{2}.$$

Il triangolo rettangolo MOP dà inoltre

$$\overline{MP}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 = 4\,\overline{OP}^2,$$

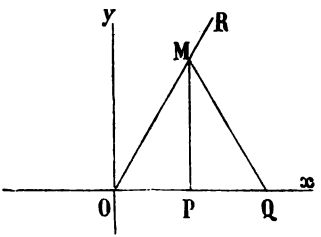

Fig. 42.

onde

$$MP = OP\sqrt{3} = \frac{MO\sqrt{3}}{2}$$

e

$$\text{sen } 60° = \frac{MP}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{tang. } 60° = \frac{MP}{OP} = \sqrt{3}.$$

Dalle formole di bisezione (o anche dal teor. I del § IV poichè l'angolo di 60° è complementare

di quello di 30°), si deduce:

$$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}, \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{tang } 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

e con nuove applicazioni delle formole di bisezione si potrebbero calcolare le funzioni goniometriche degli angoli compresi nella formola $\frac{30°}{2^m}$.

c) Abbiasi da calcolare sen 18°; si osservi perciò che

$$2 \,.\, 18° + 3 \,.\, 18° = 90°,$$

onde

$$\text{sen } 2 \,.\, 18° = \cos 3 \,.\, 18°.$$

Ma per le formole del § IX,

$$\text{sen } 2 \,.\, 18° = 2 \text{ sen } 18° \cos 18°,$$
$$\cos 3 \,.\, 18° = \cos^3 18 - 3 \text{ sen}^2 18° \cos 18°,$$

onde eguagliando e dividendo per cos 18°,

$$2 \text{ sen } 18° = \cos^2 18° - 3 \text{ sen}^2 18°;$$

ma

$$\cos^2 18° = 1 - \text{sen}^2 18°,$$

onde

$$2 \text{ sen } 18° = 1 - 4 \text{ sen}^2 18°,$$

ossia

$$\text{sen}^2 18° + \frac{1}{2} \text{ sen } 18° - \frac{1}{4} = 0$$

e risolvendo questa equazione di secondo grado nell'incognita sen 18°,

$$\text{sen } 18° = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Il segno — del radicale va escluso, poichè l'angolo di 18° è acuto, onde

$$\text{sen } 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

e conoscendo il seno si calcolano facilmente le altre funzioni trigonometriche dell'angolo di 18° e si trova:

$$\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\text{tang } 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

Da queste, colle formole di moltiplicazione, si deduce:

$$\text{sen } 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\text{tang } 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}.$$

Infine le formole di bisezione permettono di dedurre da queste le funzioni trigonometriche dell'angolo di 9° e degli angoli compresi nella formola $\frac{9^\circ}{2^m}$.

SEZIONE II.

La risoluzione dei triangoli.

§ XIII. **Relazioni fra gli elementi di un triangolo rettangolo.**

Si denotano generalmente con A, B, C, i numeri (espressi in gradi) che misurano i tre angoli di un triangolo, e con a, b, c, i numeri che misurano i lati rispettivamente opposti.

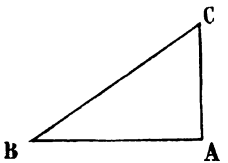

Fig. 43.

Sia ABC un triangolo rettangolo, A l'angolo retto; si hanno già dalla Geometria le relazioni

$$A = 90^\circ, \; B + C = 90^\circ$$
$$a^2 = b^2 + c^2;$$

ora la proposizione seguente ci darà nuove relazioni fra gli stessi elementi.

TEOREMA. In un triangolo rettangolo:

a) Ogni cateto è dato dal prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto [1].

b) Ogni cateto è dato dal prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo compreso.

c) Ogni cateto è dato dal prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al primo.

Se prendiamo BA come lato iniziale dell'angolo B avremo per definizione

$$\operatorname{sen} B = \frac{CA}{CB}, \quad \cos B = \frac{BA}{CB}, \quad \operatorname{tang} B = \frac{CA}{BA};$$

similmente prendendo CA come lato iniziale dell'angolo C, le definizioni del § III dànno

$$\operatorname{sen} C = \frac{BA}{BC}, \quad \cos C = \frac{CA}{BC}, \quad \operatorname{tang} C = \frac{BA}{CA};$$

sostituendo in queste e nelle precedenti le notazioni

$$BA = c, \qquad BC = a, \qquad CA = b,$$

si ottiene

$$b = a \operatorname{sen} B, \qquad c = a \operatorname{sen} C, \tag{3}$$
$$c = a \cos B, \qquad b = a \cos C, \tag{4}$$
$$b = c \operatorname{tang} B, \qquad c = b \operatorname{tang} C, \tag{5}$$

che dimostrano il teorema.

OSSERVAZIONE I. Quadrando e sommando la prima delle (3) colla prima delle (4) si ottiene

$$b^2 + c^2 = a^2 (\operatorname{sen}^2 B + \cos^2 B)$$

---

[1] Intendasi sempre: *il numero che misura ogni cateto è uguale al numero che misura l'ipotenusa, moltiplicato*, ecc.

ma essendo [1]

$$\operatorname{sen}^2 B + \cos^2 B = 1,$$

si ricade sul teorema di Pitagora: il che non è che una semplice verificazione, poichè il teorema di Pitagora stesso ha servito a stabilire la formola citata

II. Essendo la tangente inversa della cotangente dello stesso angolo, si ha dalle (5)

$$c = b \operatorname{cotg} B, \qquad b = c \operatorname{cotg} C \tag{6}$$

ossia:

Un cateto è dato dal prodotto dell'altro per la cotangente dell'angolo opposto a questo.

§ XIV. Relazioni fra gli elementi di un triangolo qualunque.

Teorema 1. In un triangolo qualunque ABC un lato AB è dato dal prodotto del diametro AD del cerchio circoscritto per il seno dell'angolo opposto C.

Si congiunga BD; l'angolo B essendo retto perchè nel semicerchio, il triangolo ABD dà:

$$AB = AD \operatorname{sen} \widehat{BDA};$$

ma

$$AB = c, \qquad \widehat{BDA} = \widehat{C}$$

perchè nel medesimo segmento; infine chiamando

---

[1] § VII, formola (1).

R il raggio del cerchio circoscritto, si avrà $AD = 2R$, onde:

$$c = 2R \operatorname{sen} C,$$

c. d. d.

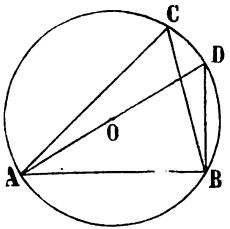

Fig. 44.

TEOREMA 2. In un triangolo i lati sono fra loro come i seni degli angoli opposti.

Essendo a, b, c i lati, A, B, C gli angoli opposti ed R il raggio del cerchio inscritto, si ha per il teorema precedente

$$a = 2R \operatorname{sen} A, \quad b = 2R \operatorname{sen} B, \quad c = 2R \operatorname{sen} C,$$

onde

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R, \qquad (2)$$

c. d. d.

TEOREMA 3. In un triangolo qualunque un lato è dato dalla somma dei prodotti degli altri due per i coseni degli angoli che formano col primo.

Abbassiamo dal punto B la perpendicolare BD

al lato AC; se questa cade fra A e C avremo dai triangoli rettangoli ABD, BDC [1]

$$AD = AB \cos A, \qquad DC = BC \cos C$$

onde sommando

$$AC = AB \cos A + BC \cos C.$$

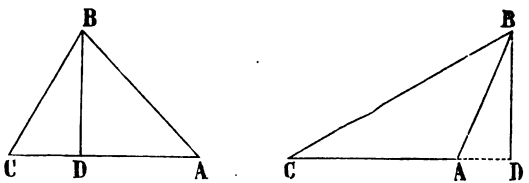

Fig. 45.

Se invece la perpendicolare BD non cade fra A e C si avrà

$$AD = AB \cos \widehat{BAD}, \qquad DC = BC \cos C,$$

ma

$$\cos BAD = \cos (180^\circ - A) = - \cos A \text{ [2]}$$

onde

$$AD = - AB \cos A,$$

e sottraendo e notando che

$$AC = DC - AD,$$

(1) § XIII, teor. 1, *b*).
(2) § IV, teor. 2.

si ottiene

$$AC = BC \cos C + AB \cos A.$$

Nei due casi, ponendo per i lati i loro valori a, b, c, si ha

$$b = c \cos A + a \cos C.$$

Osservazione I. Si possono trovare due altre formole analoghe alla precedente e formare così il sistema:

$$\left.\begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B \\ b &= c \cos A + a \cos C \\ c &= a \cos B + b \cos A \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

II. Le formole (3) si possono anche dedurre dalle (2): si ha infatti da queste moltiplicando i due termini del secondo rapporto per $\cos C$ e del terzo per $\cos B$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b \cos C}{\operatorname{sen} B \cos C} = \frac{c \cos B}{\operatorname{sen} C \cos B} =$$

$$= \frac{b \cos C + c \cos B}{\operatorname{sen} B \cos C + \operatorname{sen} C \cos B}$$

ma [1]

$$\operatorname{sen} B \cos C + \operatorname{sen} C \cos B = \operatorname{sen} (B + C)$$

e

$$\operatorname{sen} (B + C) = \operatorname{sen} (180^\circ - A) = \operatorname{sen} A \text{ [2]}$$

---

(1) § VII, formola (α).
(2) § IV, teor. 2.

talchè

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b \cos C + c \cos B}{\operatorname{sen} A}$$

ossia

$$a = b \cos C + c \cos B,$$

che è una delle (3).

TEOREMA 4. In un triangolo qualunque il quadrato di un lato è dato dalla somma dei quadrati degli altri due, meno il doppio prodotto di questi per il coseno dell'angolo che essi comprendono (v. fig. 45).

a) Nel triangolo ABC in cui $\widehat{A}$ è acuto si ha [1]

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\, AC \,.\, AD;$$

ma dal triangolo rettangolo ABD [2]

$$AD = AB \cos A,$$

onde sostituendo

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\, AB \,.\, AC \cos A.$$

b) Nel triangolo ABC in cui $\widehat{A}$ è ottuso si ha [3]

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\, AC \,.\, AD$$

ma dal triangolo ABD rettangolo

$$AD = AB \cos \widehat{BAD} = AB \cos (180^\circ - A) =$$
$$= - AB \cos A,$$

(1) *Geometria metrica*, § III, teor. 1.
(2) § XIII, teor. 1, *b*).
(3) *Geometria metrica*, § III, teor. 2.

da cui sostituendo

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,AB\,.\,AC \cos A.$$

Ponendo per i lati i loro valori a, b, c, si ha nei due casi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A.$$

Osservazione I. Si possono trovare due altre forme analoghe alla precedente e formare il sistema

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

II. Le formole (4) si possono dimostrare indipendentemente da considerazioni geometriche e deducendole dalle (3). Moltiplicando infatti le (3) rispettivamente per a, b, $-c$, sommando membro a membro e riducendo, si ottiene

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2\,ab \cos C$$

ossia

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C,$$

che è una delle (4).

III. Essendo $\cos A < 1$, la prima delle (4) dà

$$a^2 > b^2 + c^2 - 2\,bc$$

ossia

$$a^2 > (b - c)^2, \qquad a > b - c$$

donde

$$b < a + c,$$

condizione che per quanto si è visto in Geometria deve essere soddisfatta dai lati di qualunque triangolo.

IV. Alle relazioni fin qui trovate si deve aggiungere l'altra, che vale in qualunque triangolo:

$$A + B + C = 180°.$$

V. Le osservazioni fatte a questo teorema ed al precedente dimostrano che le relazioni che si sono trovate non sono tutte indipendenti, e non potrebbero esserlo perchè tre elementi di un triangolo (fra cui almeno un lato) servono a determinare gli altri, cioè fra i sei elementi non possono passare più di tre relazioni distinte. Si noti infine che per dedurre le (3) dalle (2) si è dovuto tener conto della relazione fra i tre angoli del triangolo.

§ XV. **Risoluzione dei triangoli rettangoli.**

Come si è già detto nella Introduzione, ***risolvere*** un triangolo significa trovare il valore numerico dei suoi elementi, dato che sia il valore di alcuni di essi, in numero sufficiente.

Un triangolo rettangolo essendo determinato da due elementi fra cui almeno un lato, si possono presentare quattro casi diversi di risoluzione, secondo che sono dati

a) l'ipotenusa ed un cateto,

b) l'ipotenusa ed un angolo acuto,
c) un cateto ed un angolo acuto,
d) i due cateti.

Questi casi vengono successivamente trattati nei seguenti problemi.

PROBLEMA 1. Data l'ipotenusa a ed il cateto b di un triangolo rettangolo, calcolarne gli angoli B, C ed il cateto c.

Si ha

$$b = a \operatorname{sen} B$$

da cui

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a}$$

e prendendo i logaritmi

$$\log \operatorname{sen} B = \log b - \log a;$$

essendo noti b ed a, sarà noto $\log \operatorname{sen} B$ e le tavole trigonometriche daranno il valore dell'angolo (acuto) B. Trovato B, si ha

$$C = 90^\circ - B;$$

ed il cateto c si ha dal teorema di Pitagora

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)\,(a-b)};$$

questo valore si può calcolare per logaritmi:

$$\log c = \frac{1}{2} \left\{ \log (a+b) + \log (a-b). \right\}$$

PROBLEMA 2. Data l'ipotenusa a e l'angolo B di un triangolo rettangolo, calcolare i due cateti b, c, e l'angolo C.

L'angolo C è dato immediatamente da

$$C = 90^\circ - B;$$

ed i cateti dalle formole [1]

$$b = a \operatorname{sen} B, \qquad c = a \cos B$$

da cui prendendo i logaritmi

$$\log b = \log a + \log \operatorname{sen} B,$$
$$\log c = \log a + \log \cos B.$$

PROBLEMA 3. Dato il cateto b, e l'angolo B di un triangolo rettangolo, calcolare l'angolo C, l'ipotenusa a ed il cateto c.

Si ha immediatamente

$$C = 90^\circ - B.$$

inoltre [2]

$$c = b \operatorname{tang} C$$

onde

$$\log c = \log b + \log \operatorname{tang} C;$$

infine

$$b = a \operatorname{sen} B,$$

da cui

$$a = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

e prendendo i logaritmi

$$\log a = \log b - \log \operatorname{sen} B.$$

---

(1) § XIII, teor. 1, a) e b).
(2) § XIII, teor. 1, c).

PROBLEMA 4. Dati i cateti b, c di un triangolo rettangolo, calcolarne l'ipotenusa a, e gli angoli acuti B, C.

Si ha

$$b = c \operatorname{tang} B,$$

onde

$$\operatorname{tang} B = \frac{b}{c}$$

da cui

$$\log \operatorname{tang} B = \log b - \log c,$$

e le tavole trigonometriche delle tangenti serviranno a trovare il valore dell'angolo B.

Trovato l'angolo B, l'angolo C si ha da

$$C = 90^\circ - B$$

e l'ipotenusa a da

$$a = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

onde

$$\log a = \log b - \log \operatorname{sen} B.$$

OSSERVAZIONE. Si sarebbe potuto ottenere la ipotenusa dal teorema di Pitagora

$$a = \sqrt{b^2 + c^2},$$

ma questa formola non si presta al calcolo per logaritmi.

§ XVI. Risoluzione dei triangoli obliquangoli.

Un triangolo qualunque essendo determinato da tre dei suoi elementi, purchè fra questi vi sia

almeno un lato, si potranno presentare quattro diversi casi di risoluzione dei triangoli, secondo che saranno dati

a) un lato e due angoli,
b) due lati e l'angolo opposto ad uno di essi,
c) due lati e l'angolo compreso,
d) i tre lati.

PROBLEMA 1. Dato il lato a e gli angoli B e C di un triangolo, calcolare il terzo angolo A ed i lati b e c.

L'angolo A è dato subito da

$$A = 180^\circ - B - C.$$

Si ha inoltre [1]

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

onde

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}, \qquad c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

e ricorrendo ai logaritmi

$$\log b = \log a + \log \operatorname{sen} B - \log \operatorname{sen} A,$$
$$\log c = \log a + \log \operatorname{sen} C - \log \operatorname{sen} A.$$

Il problema è sempre possibile ed ammette una sola soluzione, sotto la condizione $B + C < 180^\circ$.

PROBLEMA 2. Dati i lati a, b di un triangolo e l'angolo A opposto ad a, trovare gli angoli B e C ed il lato c.

(1) § XIV, formola (2).

Dalle formole (2) del § XIV, si ha

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

onde

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} \tag{1}$$

e prendendo i logaritmi,

$$\log \operatorname{sen} B = \log b + \log \operatorname{sen} A - \log a;$$

e questa formola, facendo conoscere l'angolo B per mezzo delle tavole, ci riconduce al problema precedente.

Discussione analitica. Il seno di qualunque angolo non potendo superare l'unità, si deve avere

$$b \operatorname{sen} A \leqq a, \tag{2}$$

condizione necessaria affinchè il problema sia possibile. Si noti che nel caso in cui

$$b \operatorname{sen} A = a$$

l'angolo B vale 90°, ed il triangolo da risolvere è rettangolo. Questo caso si può escludere dalle considerazioni che seguono, poichè saremmo ricondotti al problema 1 del § precedente.

Supposta verificata la (2), l'angolo B non risulta pienamente determinato; infatti le tavole dànno un angolo minore di 90° e che diremo B_1 avente il dato seno: ma vi sarà pure un angolo B_2 maggiore di 90° e supplementare di B_1, il quale avrà lo stesso seno, poichè

$$\operatorname{sen} B = \operatorname{sen} (180^\circ - B).$$

Ma il problema precedente (cui siamo ricondotti) è possibile sotto la sola condizione

$$A + B < 180°;$$

onde avremo due soluzioni, od una sola, o nessuna, secondochè le somme $A + B_1$ ed $A + B_2$ saranno ambedue minori di 180°, o la prima di esse minore e l'altra maggiore di 180°, o ambedue maggiori di 180°. Vediamo di esprimere queste condizioni mediante i dati del problema, e a tal uopo distinguiamo due casi:

a) $A > 90°$. Essendo

$$B_2 > 90°,$$

la somma $A + B_2$ sarà certamente maggiore di 180° e l'angolo B_2 non potrà dare alcuna soluzione. L'angolo acuto B_1 potrà dare una soluzione se

$$A + B_1 < 180°,$$

ossia se sarà

$$B_1 < 180° - A;$$

ma i due angoli B_1 e $180° - A$ essendo acuti, all'angolo maggiore corrisponderà il seno maggiore [1] e si dovrà avere

$$\text{sen } B_1 < \text{sen } (180° - A)$$

ossia

$$\text{sen } B_1 < \text{sen } A.$$

[1] § V, *Seno.*

Sostituendo per sen B_1 il suo valore (1), viene

$$\frac{b \operatorname{sen} A}{a} < \operatorname{sen} A$$

ossia

$$b < a.$$

Questa è la condizione sotto cui, per $A > 90°$, si potrà formare un triangolo cogli angoli A, B_1 e coi lati a, b: ed il problema avrà *una* soluzione.

b) $A < 90°$. L'angolo B_1 è minore di 90°, l'angolo A pure, quindi gli angoli A e B_1 potranno appartenere ad uno stesso triangolo e si avrà certamente una soluzione almeno. — Perchè l'angolo ottuso B_2 possa pure dare una soluzione dovrà essere

$$A + B_2 < 180°$$

ossia

$$A < 180 - B_2, \text{ o } A < B_1,$$

e gli angoli A e B_1 essendo acuti, si avrà per l'osservazione già fatta dianzi:

$$\operatorname{sen} A < \operatorname{sen} B_1.$$

Ponendo per sen B_1 il suo valore (1):

$$\operatorname{sen} A < \frac{b \operatorname{sen} A}{a}$$

da cui

$$a < b.$$

Sotto questa condizione si possono ottenere due soluzioni coi dati del problema, supposta pur

sempre verificata la (2). Riassumendo, si può formare la seguente tabella delle condizioni di possibilità del problema:

$b \operatorname{sen} A > a$			0 soluzioni
$b \operatorname{sen} A < a$	$A > 90^\circ$	$b > a$	0 »
		$b < a$	1 »
	$A < 90^\circ$	$b < a$	1 »
		$b > a$	2 »

Discussione geometrica. La discussione precedente acquista un maggior grado di chiarezza ove si confronti colla discussione dello stesso problema trattato graficamente.

Abbiasi da costruire un triangolo, dati i lati a, b e l'angolo $\widehat{A}$ opposto ad a. Si faccia un angolo $\widehat{xAy} = \widehat{A}$, e sul lato Ax dell'angolo si prenda $AC = b$: poscia nel centro C con raggio a si descriva una circonferenza che segherà il lato Ay dell'angolo in due punti $B_1 B_2$, od in un solo B_1, o in nessuno; nel primo caso unendo CB_1, CB_2, si avranno i due triangoli ACB_1, ACB_2, costruiti coi dati del problema, nel secondo unendo CB_1 si avrà il solo triangolo ACB_1, nel terzo non si avrà alcuna soluzione.

Intanto osserviamo che affinchè la circonferenza possa incontrare il lato Ay, il suo raggio a deve essere maggiore della perpendicolare CH abbassata da C su Ay: ma dal triangolo rettan-

golo CAH si ha

$$CH = AC \operatorname{sen} A = b \operatorname{sen} A,$$

onde deve essere

$$a > b \operatorname{sen} A$$

e si ritrova la condizione (2). Nel caso che

$$a = CH = b \operatorname{sen} A,$$

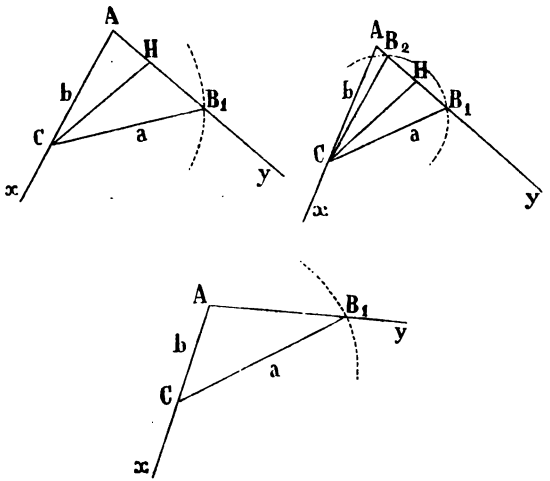

Fig. 46.

la circonferenza toccherebbe il lato Ay e la soluzione del problema sarebbe il triangolo rettangolo ACH.

Ora se l'angolo A è ottuso, vi potrà essere al più un incontro della circonferenza col lato Ay, e affinchè vi sia, dovrà essere $a > b$. Se invece A è acuto ed $a > CH$ un incontro si avrà certamente, e se ne avranno due se è $a < b$.

PROBLEMA 3. Dati due lati b, c di un triangolo e l'angolo A compreso, trovare gli angoli B, C ed il lato a.

Si ha [1]

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

ma da questa proporzione risulta

$$\frac{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B - \operatorname{sen} C} = \frac{b+c}{b-c}$$

ed applicando la formola (8) del § VIII,

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{B+C}{2}}{\operatorname{tang} \frac{B-C}{2}} = \frac{b+c}{b-c};$$

ma

$$B + C = 180^\circ - A,$$

onde

$$\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

e

$$\operatorname{tang} \frac{B+C}{2} = \operatorname{cotg} \frac{A}{2};$$

(1) § XIV, teor. 2.

sostituendo nella formola precedente viene

$$\operatorname{tang} \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$$

e prendendo i logaritmi

$$\log \operatorname{tang} \frac{B-C}{2} =$$

$$= \log (b-c) + \log \operatorname{cotg} \frac{A}{2} - \log (b+c).$$

Questa formola fa conoscere per mezzo delle tavole l'angolo $\frac{B-C}{2}$ e quindi $B-C$; ma $B+C$ è noto essendo eguale a $180° - A$, talchè si trova facilmente B e C, e siamo ricondotti al primo caso.

Osservazione. Il lato a si potrebbe ottenere da

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A,$$

ma questa formola non è calcolabile per logaritmi.

Problema 4. Dati i tre lati a, b, c, di un triangolo trovare i tre angoli.

Dalle formole (4) del § XIV si potrebbero ottenere i valori di $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ espressi per i lati a, b, c del triangolo, ma le espressioni che si otterrebbero in tal guisa non risultando calcolabili per logaritmi, converrà modificarle col seguente procedimento. Dalle citate formole si ha:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

ma delle formole di bisezione [1] si ha altresì

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

e sostituendo per cos A il suo valore

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}$$

da cui

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

$$\text{»}\quad=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$\text{»}\quad=\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}}$$

Ponendo ora

$$a+b+c=2p$$

onde

$$a+b-c=2(p-c),$$
$$a-b+c=2(p-b),$$
$$b+c-a=2(p-a),$$

(1) § X, formole *b*).

e scrivendo insieme alle precedenti le formole analoghe relative agli altri angoli, si ottiene il sistema:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{b\,c}} \\
\operatorname{sen}\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(p-c)\,(p-a)}{c\,a}} \\
\operatorname{sen}\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{a\,b}} \\
\cos\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{b\,c}} \\
\cos\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{p\,(p-b)}{a\,c}} \\
\cos\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{p\,(p-c)}{a\,b}}
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Queste formole, evidentemente calcolabili per logaritmi, risolvono il problema.

Osservazione. I radicali sono reali se le differenze

$$p-a, \quad p-b, \quad p-c,$$

ossia

$$b+c-a, \quad c+a-b, \quad a+b-c$$

sono positive: cioè il problema è possibile se sono soddisfatte le note condizioni

$$b+c>a, \quad a+c>b, \quad a+b>c.$$

§ XVII. Area del triangolo.

PROBLEMA I. Esprimere l'area di un triangolo per mezzo di due lati b, c e dell'angolo compreso A.

Sia il triangolo ABC, S la sua area, BH l'altezza: si ha [1]

$$S = \frac{1}{2} AC \times BH$$

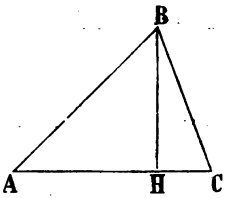

Fig. 47.

ma dal triangolo rettangolo BAH

$$BH = AB \operatorname{sen} A,$$

onde sostituendo

$$S = \frac{1}{2} AC \times AB \operatorname{sen} A,$$

e ponendo per AC, AB i loro valori b, c:

$$S = \frac{1}{2} b\, c \operatorname{sen} A. \qquad (1)$$

---

(1) *Geometria metrica*, § II, teor. 4.

Analogamente si troverebbe

$$S = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C.$$

PROBLEMA 2. Esprimere l'area di un triangolo per mezzo di un lato c e degli angoli.

Si ha [1]:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

onde:

$$b = c \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}.$$

Sostituendo nella (1) del problema precedente viene:

$$S = \frac{1}{2} \frac{c^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}.$$

PROBLEMA 3. Esprimere l'area di un triangolo per mezzo dei tre lati a, b, c.

Essendo [2]

$$\operatorname{sen} A = 2 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$$

la formola (1) del problema 1 si può scrivere

$$S = b c \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$$

---

(1) § XIV, teor. 2.
(2) § IX, formola (1).

e ponendo per sen $\frac{A}{2}$, cos $\frac{A}{2}$ i loro valori dati dalle formole (2) del problema 4 del § precedente, si ottiene

$$S = bc\sqrt{\frac{p\,(p-a)}{bc}} \times \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}},$$

e riducendo

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}. \qquad (3)$$

FINE.

ULRICO HOEPLI

LIBRAIO-EDITORE DELLA REAL CASA

MILANO

ELENCO

DEI

MANUALI HOEPLI

PUBLICATI SINO AL 1894

La collezione dei MANUALI HOEPLI, iniziata col fine di popolarizzare i principii delle Scienze, delle Lettere e delle Arti, deve il suo grandissimo successo al concorso dei più autorevoli scienziati e letterati d'Italia, ed ha ormai conseguito, mercè la sua eccezionale diffusione, uno sviluppo di più che quattrocento volumi, per cui si è dovuto classificarla per serie, come segue:

SERIE SCIENTIFICA, STORICA, LETTERARIA, GIURIDICA E LINGUISTICA

(a L. 1,50 il volume)

pei MANUALI che trattano delle scienze e degli studi letterari.

SERIE PRATICA

(a L. 2 il volume)

pei MANUALI che trattano delle industrie agricole, manifatturiere e degli argomenti che si riferiscono alla vita pratica.

SERIE ARTISTICA

(a L. 2 il volume)

pei MANUALI che trattano delle arti e delle industrie artistiche nella loro storia e nelle loro applicazioni pratiche.

SERIE SPECIALE

pei MANUALI che si riferiscono a qualsiasi argomento, ma che per la mole e per la straordinaria abbondanza di incisioni, non potevano essere classificati in una delle serie suddette, a prezzo determinato.

Tutti i Manuali Hoepli sono elegantemente legati in tela

ELENCO DEI MANUALI HOEPLI

PUBLICATI SINO AL 1894.

L. c.

Acciaio (Vedi *Siderurgia*).

Acque (Le) **minerali e termali del Regno d'Italia,** di LUIGI TIOLI. Topografia — Analisi — Elenchi — Denominazione delle acque — Malattie per le quali si prescrivono — Comuni in cui scaturiscono — Stabilimenti e loro proprietari — Acque e fanghi in commercio — Negozianti d'acque minerali di pag. XXII-552. 5 50

Acustica (Vedi *Luce e suono*).

Adulterazione e falsificazione degli alimenti, del Dott. Prof. L. GABBA, di pag. VIII-212 . . . . . 2 —

Agricoltura. (Vedi *Agronomia — Alimentazione del bestiame — Analisi del vino — Animali da cortile — Apicoltura — Bachi da seta — Bestiame — Botanica — Cacciatore — Cantiniere — Caseificio — Cavallo — Chimica agraria — Cognac — Coleotteri — Colombi — Coltivazione, ecc., delle piante tessili — Concimi — Contabilità agraria — Economia dei fabbricati rurali — Enologia — Enologia domestica — Estimo — Floricoltura — Frumento e Mais — Frutticoltura — Funghi — Gelsicoltura — Igiene rurale — Insetti nocivi — Insetti utili — Latte, cacio e burro — Legislazione rurale — Lepidotteri — Macchine agricole — Malattie crittogamiche — Malattie dei vini — Olii — Olivo — Orticoltura — Piante e fiori — Piante industriali — Pollicoltura — Prato — Selvicoltura — Tabacco — Tartufi — Uva passa — Vino — Viticoltura — Zootecnia*).

Agronomia, del Prof. F. CAREGA DI MURICCE, 2ª ed., di pag. VI-200. . . . . 1 50

Alcool (Fabbricazione e materie prime), di F. CANTAMESSA. (In lavoro).

Algebra complementare, di PINCHERLE. Parte I. *Analisi algebrica,* di pag. VIII-174. . . . . 1 50

— Parte II. *Teoria delle equazioni,* di pag. IV-170 con 4 incisioni nel testo 1 50

Algebra elementare, del Prof. S. PINCHERLE, 5ª ed., di pag. VIII-210 . . . . . 1 50

Alimentazione, di G. STRAFFORELLO, di pag. VIII-122. 2 —

Alimentazione del bestiame, di T. POGGI. (In lav.).

Alpi (Le), di J. BALL, trad. di I. Cremona, pag. VI-120. 1 50

— (Vedi *Dizionario alpino — Prealpi bergamasche*).

Alterazione dei vini. (Vedi *Analisi del vino — Malattie ed alterazioni*).

Amministrazione pubblica. (Vedi *Catasto italiano — Codice doganale — Contabilità comunale — Diritto amministrativo — Imposte dirette — Legge comunale — Ricchezza mobile — Contabilità dello Stato*).

L. c.

Analisi algebrica. (Vedi *Algebra complementare*).

Analisi del vino, ad uso dei chimici e dei legali, del Dott. M. BARTH, con pref. del Dott. I. Nessler, trad. del Prof. D. F. C. Comboni, di pag. 142 con 7 incis. 2 —

— (Vedi *Cantiniere — Cognac — Enologia — Malattie dei vini — Vino — Viticoltura*).

Analisi spettrale. (Vedi *Spettroscopia*).

Analisi volumetrica applicata specialmente ai prodotti commerciali e industriali, di P. E. ALESSANDRI. (In lavoro).

Anatomia e fisiologia comparata, del Prof. R. BESTA, di pag. VII-218 con 34 incisioni 1 50

— (Vedi *Animali Parassiti — Batteriologia — Fisiologia — Imbalsamatore — Insetti — Protistologia — Zoologia*).

Anatomia microscopica. (Vedi *Tecnica*).

Anatomia pittorica, di A. LOMBARDINI, pag. VI-118 con incisioni . . . . . 2 —

Animali (Gli) **parassiti dell'uomo,** del Prof. F. MERCANTI, di pag. IV-179, con 33 incisioni 1 50

Animali da cortile, del Prof. P. BONIZZI, di pag. XIV-238 con 39 incisioni . . . . . 2 —

— (Vedi *Bestiame — Colombi — Pollicoltura*).

Antichità private dei romani, del Prof. W. KOPP, trad. del Prof. N. Moreschi, 2ª ediz., di pag. XII-130. 1 50

— (Vedi *Archeologia dell'arte*).

Antisettici. (Vedi *Infezione, disinfezione e disinfettanti*).

Antropologia, del Prof. G. CANESTRINI, 2ª ediz., riveduta ed ampliata, di pag. VIII-232, con 23 incisioni. 1 50

— (Vedi *Etnografia — Fisiologia — Paleoetnologia*).

Apicoltura razionale, del Prof. G. CANESTRINI, 2ª edizione riveduta di pag. IV-196, con 43 incisioni . . 2 —

Apprestamento delle fibre tessili. (Vedi *Filatura*).

Arabo volgare (Manuale di), di DE STERLICH e DIB KHADDAG. Raccolta di 1200 vocaboli e 600 frasi più usuali, di pag. 143, con 8 tavole 2 50

Araldica (Grammatica), di F. TRIBOLATI, 3ª ediz., di pag. VIII-120, con 98 inc. e un'appendice sulle " Livree ". 2 50

Archeologia dell'arte, del Prof. I. GENTILE:

Parte I. *Storia dell'arte greca* testo, 2ª ed., p. XII-226. 2 —

" *Atlante* per l'opera sudd. di *149 tavole,* indice. 4 —

Parte II. *Storia dell'arte etrusca e romana,* testo, 2ª ediz., di pag. IV-228. . . . . 2 —

Parte II. *Atlante* per l'opera sudd. di *79 tavole,* indice. 2 —

Architettura italiana, dell'Arch. A. MELANI, 2 vol., di pag. XVIII-214 e XII-266, con 46 tav. e 113 fig., 2ª ediz. 6 —

I. Architet. Pelasgica, Etrusca, Italo-Greca e Romana.
II. Architettura Medioevale, fino alla Contemporanea.

L. c.

Aritmetica pratica, del Dott. F. PANIZZA, di pagine VIII-188 . . . . . 1 50

Aritmetica razionale, del Prof. Dott. F. PANIZZA, 2ª ediz., pag. XII-210 . . . . . 1 50

Arte del dire (L'), del Prof. D. FERRARI, 2ª ediz., corretta ed ampliata, di pag. XVI-190. . . . . 1 50

— (Vedi *Rettorica — Ritmica — Stilistica*).

Arte militare. (Vedi *Storia dell'*).

Arte mineraria, dell'Ing. Prof. V. ZOPPETTI, di pagine IV-182, con 112 figure in 14 tavole. . . . . 2 —

Arte greca, etrusca e romana. (Vedi *Archeologia dell'arte*).

Arti. (Vedi *Anatomia pittorica — Archeologia dell'arte — Architettura — Decorazione — Disegno — Pittura — Scienza dei colori — Scoltura*).

Arti (Le) **grafiche fotomeccaniche.** Zincotipia, Autotipia, Eliografia, Fototipia, Fotolitografia, Fotosilografia, Tipofotografia, ecc., secondo i metodi più recenti, dei grandi maestri nell'arte: ALBERT, ANGERER, CRONENBERG, EDER, GILLOT, HUSNIK, KOFAHL, MONET, POITEVIN, ROUX, TURATI, ecc., con un cenno storico sulle arti grafiche e un Dizionarietto tecnico; pag. IV-176 con 9 tavole illustrate. . . . . 2 —

— (V. *Dizion. Fotografico — Fotografia dei colori — Fotografia per dilettanti — Ricettario fotografico*).

Asfalto (L'), fabbricazione - applicazione, dell'Ing. E. RIGHETTI, con 22 incisioni, di pag. VIII-152 . . . . . 2 —

Assicurazione sulla vita, di C. PAGANI, di pagine VI-152 . . . . . 1 50

Assistenza degli infermi nell'Ospedale ed in famiglia, del Dott. C. CALLIANO, di pag. XXIV-448, con 7 tavole. 4 50

— (V. *Acque minerali — Igiene — Soccorsi d'urgenza*).

Assonometria. (Vedi *Disegno assonometrico*).

Astronomia, di I. N. LOCKYER, tradotta ed in parte rifatta da E. SERGENT e riveduta da G. V. SCHIAPARELLI, 3ª ediz., di pag. VI-156, con 44 incisioni . . . 1 50

— (Vedi *Gravitazione — Spettroscopia*).

Atlante geografico-storico dell'Italia, del Dott. G. GAROLLO, 24 carte, 76 pag. di testo e un' Appendice. 2 —

— (Vedi *Alpi — Dizionario geografico — Esercizi geografici — Geografia — Prontuario di Geografia*).

Atlante geografico universale, di KIEPERT, con notizie geografiche e statistiche del Dott. G. GAROLLO, 8ª ediz. (dalla 70000 alla 80000 copia), 25 carte, 88 pagine di testo . . . . . 2 —

Atmosfera. (V. *Climatologia - Igroscopi - Meteorologia*).

Atti notarili. (Vedi *Notaro — Testamenti*).

L. c.

Attrezzatura, manovra delle navi e segnalazioni marittime, di F. Imperato, di pag. xxii-360, con fig. 232 nel testo e xv tavole litografate 4 50
— (Vedi *Ingegnere navale — Macchinista navale*).

Autotipia. (Vedi *Arti Grafiche*).

Avicoltura. (Vedi *Animali da cortile — Colombi domestici — Pollicoltura*).

Bachi da seta, del Prof. T. Nenci, di pag. vi-276, 2ª ediz., con 41 incisioni e 2 tavole . . . . . 2 —
— (Vedi *Gelsicoltura — Industria della seta — Tintura della seta*).

Balistica. (Vedi *Esplodenti - Storia dell'Arte Militare*).

Batteriologia, dei Proff. G. e R. Canestrini, di pagine vi-240 con 29 illustrazioni 1 50
— (Vedi *Animali Parassiti — Microscopio — Protistologia*).

Bestiame (Il) **e l'agricoltura in Italia,** del Prof. F. Alberti, di pag. viii-312, con 22 zincotipie 2 50
— (Vedi *Agricoltura — Alimentazione del bestiame*).

Biancheria. (Vedi *Disegno, taglio e confezione di — Macchine da cucire*).

Bibliografia, di G. Ottino, 2ª ediz., riveduta di pagine vi-166, con 17 incisioni . . . . . 2 —
— (Vedi *Dizionario bibliografico*).

Bibliotecario (Manuale del), di Petzholdt, traduzione di G. Biagi, e G. Fumagalli, di pag. xx-364 con un'appendice di pag. 213 . . . . . 7 50

Biografia. (Vedi *Cristoforo Colombo — Dante — Omero — Shakespeare*).

Bitume. (Vedi *Asfalto*).

Blasoni. (Vedi *Araldica — Paleografia*).

Borsa (Oper. di). (V. *Valori pubblici - Debito pubblico*).

Botanica, del Prof. I. D. Hooker, traduz. del Prof. N. Pedicino, 4ª edizione, di pag. xiv-134, con 68 incisioni 1 50

Bromatologia. (Vedi *Adulterazione — Alimentazione — Conserve alimentari — Frumento e mais — Latte burro e cacio — Panificazione*).

Burro. (Vedi *Latte — Caseificio*).

Cacciatore (Manuale del), di G. Franceschi, di pagine viii-268, con 10 tavole e 14 incisioni nel testo. 2 50

Calcolo differenziale, del Prof. E. Pascal (volume doppio). (In lavoro).

Calcolo integrale, del Prof. E. Pascal (vol. doppio). (In lavoro).

Calligrafia (Manuale di). Cenno storico, cifre numeriche, materiale adoperato per la scrittura e metodo d'insegnamento, con 69 tavole di modelli dei principali

L. c.

caratteri conformi ai programmi governativi del Professore R. PERCOSSI, con 35 fac-simili di scritture, elegantemente legato, tascabile, con leggio annesso al manuale per tenere il modello . . . . . 3 —

Calore (Il), del Dott. E. JONES, trad. di U. FORNARI, di pag. VIII-296 con 98 incisioni 1 50

Caloriferi. (Vedi *Riscaldamento*).

Candele. (Vedi *Stearineria e Fabb. di Candele*).

Cantante (Manuale del), di L. MASTRIGLI, di p. XII-132. 2 —

Cantiniere. Lavori di cantina mese per mese, dell'Ingegnere A. STRUCCHI, di pag. VIII-172 con 30 incisioni. 2 —

Cartografia (Manuale teorico-pratico della), con un sunto sulla storia della Cartografia, del Prof. E. GELCICH, di pag. VI-257, con 37 illustrazioni . . . . . 2 —

— (Vedi *Disegno topografico — Telemetria*).

Case. — (Vedi *Proprietario di Case*).

Caseificio, di L. MANETTI, 2ª edizione, completamente rifatta di SARTORI, di pagine IV-212, con 34 incisioni. 2 —

— (Vedi *Adulterazione degli alimenti — Latte, burro, cacio*).

Catasto (Il nuovo) **italiano,** dell'Avv. E. BRUNI, di pag. XII-346, vol. doppio. . . . . 3 —

Cavallo (Manuale del), del Ten. Colonnello C. VOLPINI, di pag. IV-200 con illustrazioni e 8 tavole. . . 2 50

Celerimensura (Manuale pratico di), e tavole logaritmiche a quattro decimali dell'Ing. F. BORLETTI, di pag. VI-148 con 29 incisioni 3 50

Celerimensura (Manuale e tavole di), dell'Ing. G. ORLANDI, di p. 1200 con quadro generale d'interpolazioni. 18 —

— (V. *Cartografia — Compensazione degli errori — Disegno topografico — Geometria pratica — Telemetria*).

Cementazione. (Vedi *Tempera*).

Ceralacche. (Vedi *Vernici*).

Cereali. (Vedi *Frumento e Mais — Panificazione*).

Chimica, del Prof. H. E. ROSCOE, traduzione del Prof. A. PAVESI, di pag. VI-124, con 36 inc., 4ª ediz. 1 50

Chimica agraria, del Dott. A. ADUCCO, di p. VIII-328. 2 50

— (Vedi *Concimi*).

Chimico (Manuale del) **e dell' industriale,** ad uso dei Chimici analitici e tecnici, degli industriali, ecc., del Dott. Prof. L. GABBA, di pag. XII-354 . . . . . 5 —

— (Vedi *Analisi volumetrica*).

Ciclista (Manuale del), di A. GALANTE, riccamente illustrato, di pag. VI-194, con 73 fototipie 2 50

Climatologia, di L. DE MARCHI, p. X-204, con 6 carte 1 50

— (Vedi *Igroscopi — Meteorologia — Sismologia*).

Codice doganale italiano con commento e note, dell'Avv. E. BRUNI, di pag. XX-1078 con 4 incisioni. 6 50

— (V. *Amministrazione pubblica - Trasporti e tariffe*).

L. c.

Codice metrico internazionale. (Vedi *I Prototipi del metro e del kilogramma*).

Cognac (Fabbricazione del) **e dello spirito di vino e distillazione delle fecce e delle vinacce,** di Dal Piaz-di Prato, di pag. x-168, con 37 incisioni. 2 —

Coleotteri italiani, del Dott. A. Griffini, p. xvi-334 con 215 incisioni (volume doppio) . . . . . 3 —

Colombi domestici e colombicoltura, del Prof. P. Bonizzi, di pag. vi-210, con 29 incisioni . . . . . 2 —

— (Vedi *Animali da cortile — Pollicoltura*).

Colombo C. (Vedi *Cristoforo Colombo*).

Colori e la pittura (La scienza dei), del Prof. L. Guaita, di pag. 248. . . . . 2 —

— (Vedi *Anatomia pittorica*).

Colori e vernici, di G. Gorini, 3ª ediz., di p. iv-184. 2 —

— (Vedi *Fotografia — Luce e colori — Vernici*).

Coltivazione ed industrie delle piante tessili, propriamente dette e di quelle che danno materia per legacci, lavori d'intreccio, sparteria, spazzole, scope, carta, ecc., coll'aggiunta di un Dizionario delle piante ed industrie tessili, di oltre 3000 voci, del Prof. M. A. Savorgnan D'Osoppo, di pag. xii-476, con 72 incis. 5 —

— (Vedi *Filatura - Gelsicoltura - Piante industriali*).

Compensazione degli errori con speciale applicazione ai rilievi geodetici, di F. Crotti, pag. iv-160. 2 —

Computisteria, del Prof. V. Gitti, vol. I. Computisteria commerciale, 3ª ediz., di pag. vi-168. . . . . 1 50

— Vol. II. Computisteria finanziaria, di pag. viii-156. 1 50

Computisteria agraria, del Prof. L. Petri, di pagine vi-212. . . . . 1 50

— (Vedi *Contabilità — Logismografia — Ragioneria — Scritture d'affari*).

Concia delle pelli ed arti affini, di G. Gorini, 3ª edizione interamente rifatta dai Dott. G. B. Franceschi e G. Venturoli, di pag. ix-210. . . . . 2 —

Concimi, del Prof. Funaro, di pag. vii-253 . . . . 2 —

— (Vedi *Chimica agraria*).

Confezione di biancheria. (Vedi *Disegno, taglio e*).

Conserve alimentari, di G. Gorini, 3ª ediz. interamente rifatta dai Dott. G. B. Franceschi e G. Venturoli. (In lavoro).

— (Vedi *Adulterazione — Alimentazione — Frumento e mais — Latte, burro e cacio — Panificazione*).

Contabilità comunale, secondo le nuove disposizioni legislative e regolamentari (Testo unico 10 febbraio 1889 e R. Decreto 6 luglio 1890, del Prof. A. De Brun, di pag. viii-244 . . . . . 1 50

— (Vedi *Diritto amministrativo — Legge comunale*).

L. c.

Contabilità generale dello Stato, dell'Avv. E. Bruni, pag. XII-422 (vol. doppio) . . . . . 3 —
— (V. *Computisteria — Ragioneria — Logismografia*).
Corpi grassi e stearineria, dell'Ing. E. Marazza.
— (Vedi *Industria stearica*).
Correttore e compositore tipografo. (V. *Tipografia*).
Corse (Dizionario delle), (Vedi *Cavallo*).
Costituzione di tutti gli Stati. (Vedi *Ordinamento*).
Costumi. (Vedi *Etnografia*).
Cristallografia geometrica, fisica e chimica applicata ai minerali, del Prof. F. Sansoni, di p. XVI-368, con 284 incisioni nel testo (vol. doppio) . . . . . 3 —
— (Vedi *Geologia — Mineralogia*).
Cristoforo Colombo, di V. Bellio, con 10 inc., p. IV-136 1 50
Crittogame. (V. *Malattie crittogamiche delle piante*).
Cronologia. (Vedi *Storia e Cronologia*).
Cubatura. Prontuario per la cubatura dei legnami, di G. Belluomini, 2ª ediz. aumentata e corretta, di pag. 204. 2 50
Curve. Manuale pel tracciamento delle curve delle Ferrovie e Strade carrettiere di G. H. Kröhnke, traduzione di L. Loria, 2ª ediz. di pag. 164, con 1 tavola. 2 50
Dantologia, di G. A. Scartazzini, 2ª ediz. Vita ed Opere di Dante Alighieri, di pag. VI-408 (vol. doppio) 3 —
Debito (Il) **pubblico italiano** e le regole e i modi per le operazioni sui titoli che lo rappresentano, di F. Azzoni, di pag. VIII-376 (vol. doppio). . . . . 3 —
Decorazione e industrie artistiche, con una introduzione sulle industrie artist. nazionali, dell'Arch. A. Melani, 2 vol., di complessive pag. XX-460, con 118 incis. 6 —
Demografia. (Vedi *Statistica*).
Diboscamento. (Vedi *Selvicoltura*).
Didattica per gli alunni delle scuole normali e pei maestri elementari del Prof. G. Soli, di pag. VIII-214 . 1 50
Digesto (Il), di C. Ferrini, di pag. IV-134. . . . . 1 50
Dinamica elementare, del Dott. C. Cattaneo, di pag. VIII-146, con 25 figure 1 50
— (Vedi *Termodinamica*).
Diplomatica, del Prof. L. Zdekauer. (In lavoro).
Diplomi. (Vedi *Araldica — Paleografia*).
Diritti e doveri dei cittadini, secondo le Istituzioni dello Stato, per uso delle pubbliche scuole, del Prof. D. Maffioli, 8ª ed., di pag. XVI-206 . . . . . 1 50
Diritto amministrativo giusta i programmi governativi, ad uso degli Istituti tecnici, del Prof. G. Loris, 2ª edizione, di pag. XXII-506 (volume doppio). . . . 3 —
Diritto civile italiano, del Prof. C. Albicini, p. VIII-128 1 50
Diritto commerciale. (Vedi *Mandato*).
Diritto comunale e provinciale, di Mazzoccolo. (Vedi *Legge comunale e provinciale*).

L. c.

Diritto costituzionale, di F. P. Contuzzi, p. XII-320. 1 50

Diritto ecclesiastico, del Dott. C. Olmo, di pagine XII-472 (volume doppio) . . . . . 3 —
— (Vedi *Benefici vacanti*).

Diritto internazionale privato, dell'Avv. Prof. F. P. Contuzzi, di pag. XVI-392 (volume doppio) . . . . 3 —

Diritto internazionale pubblico, dell'Avv. Prof. F. P. Contuzzi, di pag. XII-320 (volume doppio). . . . . 3 —

Diritto penale, dell'Avv. A. Stoppato, di p. VIII-192. 1 50

Diritto romano, del Prof. C. Ferrini, di pag. VIII-132. 1 50

Disegno. I principii del Disegno e gli stili dell'Ornamento, del Prof. C. Boito, 3ª edizione, di pag. IV-206, con 61 silog. . . . . 2 —

Disegno assonometrico, del Prof. Paoloni, di pagine IV-122 con 21 tavole e 23 figure nel testo. . . 2 —

Disegno geometrico, del Prof. A. Antilli, di pagine VIII-85, 6 figure nel testo e 26 tavole litografiche 2 —

Disegno topografico, del Capitano G. Bertelli, 2ª ediz. di pag. VI-137, con 12 tavole e 10 incisioni . 2 —
— (*Vedi Cartografia — Telemetria*).

Disegno, taglio e confezione di biancheria (Manuale teorico pratico di), di E. Bonetti, con un Dizionario di nomenclatura, p. VIII-216 con 40 tav. 3 —

Disinfezione. (Vedi *Infezione*).

Distillazione. (Vedi *Alcool — Cognac*).

Dizionario alpino italiano. Parte 1ª: *Vette e valichi italiani,* dell'Ing. E. Bignami-Sormani. — Parte 2ª: *Valli lombarde e limitrofe alla Lombardia,* dell'Ing. C. Scolari, di pag. XXII-310 . . . . . 3 50
— (Vedi *Alpi* e *Prealpi bergamasche*).

Dizionario Eritreo italiano arabo-amarico, di A. Allori. (In lavoro).

Dizionario della lingua dei Galla (Oromonica). (Vedi *Grammatica*).

Dizionario bibliografico, di C. Arlìa, di pag. 100. 1 50

Dizionario Filatelico, per il Raccoglitore di francobolli con introduzione storica e bibliografia di J. Gelli di pag. LXIV-412. . . . . 4 50

Dizionario fotografico ad uso dei dilettanti e professionisti, contenente oltre 1500 voci in 4 lingue, nonchè 500 sinonimi e 600 formule del Dott. Luigi Gioppi, di pag. VIII-600 con 95 incis. e 10 tavole fuori testo. 7 50
— (Vedi *Arti grafiche fotomeccaniche — Fotografia per dilettanti — Ricettario fotografico*).

Dizionario geografico universale, del Dott. G. Garollo, 3ª edizione, di pag. VI-632 a due colonne . . 6 50

Dizionario italiano. (Vedi *Vocabolario italiano*).

Dizionario italiano e Volapük, di C. Mattei. (Vedi *Volapük*).

L. c.

Dizionario termini delle corse, di C. VOLPINI, di pag. 47 . . . . . 1 —

Dizionario universale delle lingue italiana, tedesca, inglese e francese, disposte in un unico altabeto, 1 vol. di pag. 1200 . . . . . 8 —

Dogane. (Vedi *Codice doganale — Trasporti*).

Dottrina popolare, in 4 lingue. (Italiana, Francese, Inglese e Tedesca). Motti popolari, frasi commerciali e proverbi, raccolti da G. SESSA, 2ª ediz., di pag. IV-212. 2 —

Economia dei fabbricati rurali, di V. NICCOLI, di pag. VI-192. . . . . 2 —
— (Vedi *Estimo rurale — Legislazione rurale*).

Economia politica, del Prof. W. S. JEVONS, traduz. del Prof. L. COSSA, 3ª ed., riveduta, di pag. XIV-174. 1 50
— (Vedi *Scienza delle finanze*).

Elettricista (Manuale dell'), di G. COLOMBO e R. FERRINI, di pag. VIII-204-44 con 40 incisioni . . . . . 4 —
— (Vedi *Illuminazione — Telefono — Telegrafia*).

Elettricità, del Prof. FLEEMING JENKIN, traduz. del Prof. R. FERRINI, di pag. VIII-180, con 32 incisioni. 1 50
— (Vedi *Magnetismo — Unità assolute*).

Elettrolisi. (Vedi *Galvanoplastica*).

Ellografia. (Vedi *Arti grafiche*).

Embriologia e morfologia generale, del Prof. G. CATTANEO. (In lavoro).

Enciclopedia Hoepli (Piccola), in 2 volumi di 3375 pagine di due colonne per ogni pagina con Appendice. L'opera completa elegantemente legata. . . . 20—

Energia fisica, di R. FERRINI, di p. VI-108, con 15 inc. 1 50
— (Vedi *Dinamica elementare — Termodinamica*).

Enologia, precetti ad uso degli enologi italiani, del Prof. O. OTTAVI, 2ª ediz., riveduta e ampliata da A. STRUCCHI, di pag. XII-194, con 21 incisioni . . . . 2 —
— (Vedi *Analisi del vino - Cantiniere - Cognac - Enologia domestica - Malattie dei vini - Vino - Viticoltura*).

Enologia domestica, di R. SERNAGIOTTO, pag. VIII-223. 2 —

Entomologia. (Vedi *Coleotteri italiani — Insetti nocivi — Insetti utili — Lepidotteri*).

Equazioni (Teoria delle), del Prof. S. PINCHERLE, di pag. XII-170, con 4 incisioni 1 50
— (Vedi *Algebra complementare*).

Errori e pregiudizi volgari, confutati colla scorta della scienza e del raziocinio da G. STRAFFORELLO, di pag. IV-170. . . . . 1 50

Esercizi geografici e quesiti, di L. HUGUES, **sull'Atlante di R. Kiepert,** 2ª ediz., di pag. 76 . . 1 —

Esercizi di traduzione a complemento della grammatica francese, del Prof. G. PRAT, p. VI-183 1 50

L. c.

Esercizi di traduzione con vocabolario a complemento della grammatica tedesca, del Prof. G. ADLER, di pag. IV-236 . . . . . 1 50
— (Vedi *Grammatica tedesca — Letteratura*).
Esplodenti e modo di fabbricarli, R. MOLINA, p. XX-300 2 50
Estetica, del Prof. M. PILO, di pag. XX-260 . . . . . 1 50
— (Vedi *Etica — Filosofia — Logica — Psicologia*).
Estimo rurale, di F. CAREGA DI MURICCE, p. VI-164. 2 —
— (Vedi *Agronomia — Disegno topografico — Economia dei fabbricati rurali — Geometria pratica*).
Etica, del Prof. L. FRISO. (In lavoro).
Etnografia, del Prof. B. MALFATTI, 2ª ediz., interamente rifusa, di pag. VI-200 . . . . . 1 50
— (Vedi *Antropologia — Paleoetnologia*).
Etnologia. (Vedi *Antropologia*).
Fabbricati rurali. (Vedi *Economia dei*).
Fabbriche. (Vedi *Proprietario di Case*)
Fabbro. (Vedi *Fonditore — Operaio — Tornitore*).
Falegname ed ebanista. Natura dei legnami, maniera di conservarli, prepararli, colorirli e verniciarli, loro cubatura, di G. BELLUOMINI, pag. X-138, con 42 inc. 2 —
Falsificazione degli alimenti. (Vedi *Adulterazione*).
Farmacista (Manuale del), del Dott. P. E. ALESSANDRI, di pag. XII-628, con 138 tav. e 80 incisioni originali. 6 50
Ferro. (Vedi *Siderurgia*).
Ferrovie. (Vedi *Trasporti*).
Filatelia, (Vedi *Dizionario filatelico*)
Filatura. Manuale di filatura, tessitura e lavorazione meccanica delle fibre tessili, di E. GROTHE, traduzione sull'ultima edizione tedesca, di p. VIII-414, con 105 inc. 5 —
— (Vedi *Coltivazione — Piante industriali*).
Filologia classica, greca e latina, del Prof. V. INAMA, di pag. XII-195 . . . . . 1 50
— (Vedi *Letteratura greca e romana*).
Filonauta. Quadro generale di navigazione da diporto e consigli ai principianti, con un Vocabolario tecnico più in uso nel panfiliamento, del Cap. G. OLIVARI, p. XVI-286 2 50
Filosofia morale, di L. FRISO, p. XVI-336 (vol. doppio) 3 —
— (Vedi *Estetica — Etica — Logica — Psicologia*).
Finanze (Vedi *Scienza delle*).
Fiori. (Vedi *Floricoltura — Piante e fiori*).
Fisica, del Prof. BALFOUR STEWART, trad. del Prof. G. CANTONI, 4ª ediz., di pag. X-188, con 48 incisioni . . 1 50
— (Vedi *Calore — Energia fisica — Luce e suono*).
Fisiologia, di FOSTER, traduz. del Prof. G. ALBINI, 3ª ediz., di pag. XII-158, con 18 incisioni 1 50
Fisiologia comparata. (V. *Anatomia — Embriologia*).
Fitologia. (Vedi *Botanica — Flora italiana — Floricoltura — Frutticoltura*).

L. c.

Flora italiana tascabile, di R. PIROTTA. (In lavoro).
Floricoltura (Manuale di), di C. M. Fratelli RODA, di pag. VIII-186, con 61 incisioni. . . . . 2 —
— (Vedi *Botanica — Piante e fiori*).
Fognatura cittadina, dell'Ing. D. SPATARO. (In lav.).
Fonditore in tutti i metalli (Manuale del), di G. BELLUOMINI, di pag. 146, con 41 incisioni . . . . . 2 —
Fonologia greca, del Prof. A. CINQUINI. (In lavoro).
Fonologia italiana, del Dott. L. STOPPATO, p. VIII-102. 1 50
Fonologia latina, di S. CONSOLI, di pag. 208 . . . 1 50
Fotogalvanotipia. (Vedi *Arti grafiche*).
Fotografia dei colori, del Dott. C. BONACINI. (In lav.)
Fotografia pei dilettanti. (Come il sole dipinge), di G. MUFFONE, di pag. X-204, 2ª ediz., con molte incis. 2 —
— (Vedi *Arti grafiche — Dizionario fotografico — Ricettario fotografico*).
Francobolli. (Vedi *Dizionario Filatelico*).
Frumento e mais, di G. CANTONI, p. VI-168 e 13 incis. 2 —
— (V. *Adulterazione — Alimentazione — Panificazione*).
Frutticoltura, del Prof. Dott. D. TAMARO, con 63 illustrazioni, di pag. VIII-192 . . . . . 2 —
— (Vedi *Pomologia artificiale — Uva passa*).
Fulmini e parafulmini, del Dott. Prof. E. CANESTRINI, di pag. VIII-166, con 6 incisioni . . . . . 2 —
Funghi (I) **ed i tartufi,** loro natura, storia, coltura, conservazione e cucinatura. Cenni di FOLCO BRUNI . . 2 —
Fuochi artificiali. (Vedi *Pirotecnia*).
Fuochista. (Vedi *Macchinista*).
Galvanoplastica, ed altre applicazioni dell'elettrolisi, Galvanostegia, Elettrometallurgia, Affinatura dei metalli, Preparazione dell'alluminio, Sbianchimento della carta e delle stoffe, Risanamento delle acque, Concia elettrica delle pelli, ecc., del Prof. R. FERRINI, 2ª ed., completamente rifatta, di pag. XII-392 con 45 incisioni. 4 —
Gelsicoltura, del Prof. Dott. D. TAMARO, p. XVI-175, con 22 incisioni nel testo . . . . . 2 —
— (Vedi *Coltivazione e industria delle piante tessili*).
Geodesia. (Vedi *Compensazione degli errori — Celerimensura — Curve — Disegno topografico — Geometria pratica — Telemetria*).
Geodinamica. (Vedi *Sismologia — Termodinamica — Vulcanismo*).
Geografia, di G. GROVE, trad. del Prof. E. GALLETTI, 2ª ediz., riveduta, di pag. XII-160, con 26 incisioni. . 1 50
— (Vedi *Alpi — Atlante — Cartografia — Disegno topografico — Dizionario geografico — Mare — Prontuario di geografia*).
Geografia classica, di H. F. TOZER, traduzione e note del Prof. I. GENTILE, 5ª ediz., di pag. IV-168. . 1 50

L. c.

Geografia fisica, di A. Geikie, traduzione sulla 6ª edizione inglese di A. Stoppani, 3ª ediz., pag. IV-132, con 20 incisioni 1 50

Geologia, di Geikie, traduzione sulla 3ª edizione inglese di A. Stoppani, 3ª ed., di p. VI-154, con 47 inc. 1 50
— (Vedi *Cristallografia — Mineralogia*).

Geometria analitica dello spazio, del Prof. F. Aschieri, di pag. VI-196, con 11 incisioni 1 50

Geometria analitica del piano, del Pr. F. Aschieri, di pag. VI-194, con 12 incisioni 1 50

Geometria descrittiva, del Prof. F. Aschieri, di pag. IV-210, con 85 incisioni 1 50

Geometria metrica e trigonometria, del Prof. S. Pincherle, 3ª ediz., di pag. VI-152, con 16 incisioni. 1 50

Geometria pratica, dell'Ing. Prof. G. Erede, 2ª ediz., riveduta, di pag. X-184, con 124 incisioni . . . . . 2 —
— (Vedi *Celerimensura — Disegno assonometrico — Disegno geometrico — Disegno topografico — Geodesia — Regolo calcolatore — Statica — Telemetria*).

Geometria projettiva del piano e della stella, del Prof. F. Aschieri, 2ª ed., di p. VI-228, con 86 inc. 1 50

Geometria projettiva dello spazio, del Prof. F. Aschieri, con molte incisioni. (In lavoro).

Geometria pura elementare, del Prof. S. Pincherle, 3ª ediz., di pag. VI-140, con 112 incisioni . . 1 50

Ghisa. (Vedi *Siderurgia*).

Giardino (Il) **infantile,** del Prof. P. Conti, di pagine IV-214, con 27 tavole (vol. doppio) . . . . . 3 —

Ginnastica (Storia della), di F. Valletti, di p. VIII-184. 1 50

Ginnastica femminile, di F. Valletti, di pag. VI-112, con 67 illustrazioni . . . . . 2 —

Ginnastica maschile (Manuale di), per cura di J. Gelli, di pag. VIII-108, con 216 incisioni . . . . . 2 —
— (Vedi *Scherma*).

Gioielleria, oreficeria, oro, argento e platino, di E. Boselli, di pag. 336, con 125 incisioni . . . 4 —
— (Vedi *Pietre preziose — Metalli preziosi*).

Giuochi. (Vedi *Scacchi*).

Giurisprudenza. (V. *Codice doganale — Digesto — Diritto amministrativo — Diritto civile — Diritto costituzionale — Diritto ecclesiastico — Diritto internazionale pubblico e privato — Diritto penale — Diritto romano — Imposte dirette — Legge comunale — Legislazione rurale — Mandato commerciale — Notaio — Ricchezza mobile — Testamenti*).

Grafologia con numerosi autografi del Prof. C. Lombroso. (In lavoro).

Grammatica araldica. (Vedi *Araldica*).

L. c.

Grammatica e dizionario della lingua dei Galla (oromonica), del Prof. E. VITERBO.
Vol. I. Galla-Italiano, di pag. VIII-152 . . . . . 2 50
Vol. II. Italiano-Galla, di pag. LXIV-106. . . . . 2 50

Grammatica francese, del Prof. G. PRAT, p. XI-287. 1 50
— (Vedi *Esercizi di traduzione*).

Grammatica greca, del Prof. INAMA. (In lavoro).
(Vedi *Fonologia — Morfologia*).

Grammatica della lingua greca moderna, del Prof. R. LOVERA, di pag. VI-154 . . . . . 1 50

Grammatica inglese, del Prof. LUGI PAVIA, p. XII-260 1 50

Grammatica italiana, di T. CONCARI, di p. VII-204. 1 50

Grammatica latina, del Prof. VALMAGGI, di p. X-250. 1 50
— (Vedi *Fonologia latina — Letteratura romana*).

Grammatica e vocabolario della lingua rumena, del Prof. R. LOVERA, di pag. VIII-200 . . . . . 1 50

Grammatica sanscrita. (Vedi *Sanscrito*).

Grammatica spagnuola, del Prof. L. PAVIA. (In lav.).

Grammatica tedesca, del Prof. L. Pavia. p. XVIII-254. 1 50
— (V. *Esercizi di traduzione — Letteratura tedesca*).

Gravitazione. Spiegazione elementare delle principali perturbazioni nel sistema solare di Sir G. B. AIRY, traduzione con note ed aggiunte del Prof. F. PORRO, con 50 incisioni, di pag. XXIV-176 . . . . . 1 50
— (Vedi *Astronomia — Spettroscopio*).

Grecia (La) **antica,** di G. TONIAZZO. (V. *Storia antica*).

Idroterapia. (Vedi *Acque* [*cura delle*]).

Igiene del lavoro, TRAMBUSTI A. e SANARELLI. di pagine VIII-362 con 70 incisioni. 2 50

Igiene della vita pubblica e privata, del Dott. G. FARALLI, di pag. XII-250 . . . . . 2 50

Igiene privata e medicina popolare ad uso delle famiglie, di C. BOCK, trad. di E. PARIETTI sulla 7ª ediz. ted. con una introduzione di G. SORMANI, di pag. XII-278. 2 50

Igiene pubblica, del Prof. SORMANI. (In lavoro).

Igiene rurale, A. CARRAROLI, pag. X-470 (vol. doppio). 3 —
— (Vedi *Assistenza agli infermi — Soccorsi d'urgenza*).

Igiene scolastica, di A. REPOSSI, 2ª ed., di pag. IV-246. 2 —

Igiene veterinaria, del Dott. U. BARPI, di p. VIII-228. 2 —
— (Vedi *Zoonosi*).

Igroscopi, igrometri, umidità atmosferica, del Prof. P. CANTONI, di pag. XII-146, con 24 inc. e 7 tab. 1 50
— (Vedi *Climatologia — Meteorologia*).

Illuminazione elettrica (Impianti di), dell'Ing. E. PIAZZOLI, 2ª edizione interamente rifatta, di pag. XIV-466, con 263 incisioni, 78 tabelle e 2 tav. litografate. 6 50

Imbalsamatore (Manuale dell'), preparatore tassidermista, di R. GESTRO, 2ª ed. riv., di p. XII-148, 38 inc. 2 —
— (Vedi *Naturalista viaggiatore*).

L. c.

Impianti elettrici. (V. *Elettricità — Illuminazione*).
Imposta sui redditi di ricchezza mobile (Vedi *Ricchezza mobile*).
Imposte dirette (Riscossione delle), E. Bruni, p. viii-158 1 50
Imposte sul fabbricati. (Vedi *Proprietario di case*).
Inchiostri. (Vedi *Vernici*).
Industria della seta, di L. Gabba, 2ª ed., p. iv-208. 2 —
Industria (L') **stearica.** Manuale pratico dell'Ing. E. Marazza, di pag. 288, con 76 inc. e con molte tab. 5 —
Industrie. (Vedi *Apicoltura — Arte mineraria — Asfalto — Bachi da seta — Caseificio — Concia delle pelli — Conserve — Galvanoplastica — Giojelleria — Merceologia — Molini — Olio — Orologeria — Piccole industrie — Tabacco — Tintore,* ecc.).
Industrie artistiche. (Vedi *Decorazione*).
Industrie tessili. (Vedi *Coltivazione — Gelsicoltura Filatura — Seta*).
Infezione, disinfezione e disinfettanti, del Dottor Prof. P. E. Alessandri, di pag. viii-190, con 7 inc. 2 —
Ingegnere civile. Manuale dell'Ingegnere civile e industriale, di G. Colombo, 13ª ed. (31°, 32° e 33° migliaio), di p. xiv-356, con 203 fig. e con una Bibliografia dell'Ingegnere disposta in ordine alfabetico delle materie di p. 148 5 50
Il medesimo tradotto in francese da P. Marcillac. 5 50
Ingegnere navale. Prontuario di A. Cignoni, con 36 fig., di pag. xxxii-292. Leg. in tela L. 4 50, in pelle. 5 50
— (Vedi *Attrezzatura — Macchinista navale*).
Ingrassi. (Vedi *Chimica agraria — Concimi*).
Insetti nocivi, F. Franceschini, p. viii-264, 96 incis. 2 —
Insetti utili, di F. Franceschini, di pag. xii-160, con 43 incisioni ed 1 tavola . . . . . 2 —
Interesse e sconto, di E. Gagliardi, di pag. vi-204. 2 —
— (Vedi *Contabilità — Computisteria — Debito pubblico — Ragioneria — Valori pubblici*).
Istituzioni dello Stato (Le). (Vedi *Diritti e doveri dei cittadini — Ordinamento degli Stati*).
Ittiologia. (Vedi *Piscicoltura — Ostricoltura e Mitilicoltura*).
Latte, burro e cacio. Chimica analitica applicata al caseificio, del Prof. Sartori, di pag. x-162, con 24 inc. 2 —
— (Vedi *Adulterazione degli alimenti — Caseificio*).
Legge sulle caldaje. (Vedi *Macchinista e Fuochista*).
Legge (La nuova) **comunale e provinciale,** annotata dall'Avv. E. Mazzoccolo, 3ª ediz., con l'aggiunta di due regolamenti e due indici, di pag. viii-728 . . 4 50
Leggi. (Vedi *Codice doganale — Diritto amministrativo-civile-commerciale-ecclesiastico-penale-romano — Imposte dirette — Legislazione rurale — Ordinamento degli stati — Ricchezza mobile*).

L. c.

Legislazione rurale secondo il programma governativo per gli Istituti Tecnici dell'Avv. E. Bruni, di p. xi-422 3 —
Legnami. (Vedi *Cubatura dei legnami — Falegname*).
Lepidotteri italiani, del Dott. A. Griffini, di pagine viii-238 con 149 incisioni 1 50
Letteratura americana, di G. Strafforello, p. 158 1 50
Letteratura danese. (Vedi *Letteratura norvegiana*).
Letteratura ebraica, di A. Revel, 2 vol., di pag. 364. 3 —
Letteratura egiziana, del Dott. L. Brigiuti. (In lav.).
Letteratura francese, del Prof. F. Marcillac, trad. di A. Paganini, 2ª ediz., di pag. viii-184 . . . . . 1 50
Letteratura greca, del Prof. V. Inama, 10ª ediz., migliorata (dal 35° al 40° migliaio), di pag. viii-234 . . 1 50
— (Vedi *Filologia classica — Verbi Greci Anomali*).
Letteratura indiana, del Prof. A. De Gubernatis, di pag. viii-159 . . . . . 1 50
Letteratura inglese, del Prof. E. Solazzi, 3ª ediz., di pag. viii-194 . . . . . 1 50
Letteratura islandese, di S. Ambrosoli. (In lavoro).
Letteratura italiana, di C. Fenini, 4ª ed., di p. vi-204 1 50
Letteratura latina. (Vedi *Fonologia latina — Grammatica latina — Letteratura romana*).
Letteratura norvegiana del Dott. S. Consoli, di pag. xvi-272 . . . . . 1 50
Letteratura persiana, del Prof. I. Pizzi, di pag. x-208. 1 50
Letteratura provenzale, A. Restori, di pag. x-220. 1 50
Letteratura romana, del Prof. F. Ramorino, 3ª ediz. riveduta e corretta (dall'8° al 12° migliaio), p. iv-320. 1 50
— (Vedi *Filologia classica — Grammatica latina*).
Letteratura spagnuola e portoghese, del Prof. L. Cappelletti, di pag. vi-206 . . . . . 1 50
Letteratura tedesca, del Prof. O. Lange, traduz. di A. Paganini, 2ª ediz., corretta, di pag. xii-168. . 1 50
— (Vedi *Esercizi — Grammatica tedesca*).
Letteratura ungherese, di Zigàny Arpàd, di pagine xii-295 . . . . . 1 50
Letterature slave, di D. Ciàmpoli, 2 volumi:
I. Bulgari, Serbo-Croati, Yugo-Russi, di pag. iv-144. 1 50
II. Russi, Polacchi, Boemi, di pag. iv-142 . . . . 1 50
Libri. (Vedi *Bibliografia — Bibliotecario — Dizionario Bibliografico — Paleografia — Tipografia*).
Lingua araba. (Vedi *Arabo volgare*).
Lingua dei Galla (oromonica). (Vedi *Grammatica*).
Lingua francese. (Vedi *Grammatica e Esercizi*).
Lingua greca. (Vedi *Grammatica — Letteratura*).
Lingua greca moderna. (Vedi *Grammatica*).
Lingua latina. (Vedi *Grammatica — Letteratura romana*).
Lingua rumena. (Vedi *Grammatica*).

L. c.

Lingua sanscrita. (Vedi *Sanscrito*).
Lingua tedesca. (Vedi *Esercizi — Grammatica — Letteratura*).
Lingua tigrè. (Vedi *Tigrè*).
Lingue comparate. (Vedi *Storia comparata*).
Lingue diverse. (V. *Letteratura delle singole lingue*).
Lingue dell' Africa, di R. Cust, versione italiana del Prof. A. De Gubernatis, di pag. IV-110. . . . 1 50
— (Vedi *Arabo volgare — Dizionario eritreo — Grammatica oromonica — Tigrè*).
Lingue neo-latine, del Dott. E. Gorra, di pag. 147. 1 50
Lingue straniere (Studio delle), di Marcel, ossia l'Arte di pensare in una lingua straniera, traduz. del Prof. Damiani, di pag. XVI-136 . . . . . 1 50
Livree. (Vedi *Araldica*).
Logaritmi (Tavole di), con 5 decimali, pubblicate per cura di O. Müller, 3ª ediz., di pag. XX-142 . . . . 1 50
Logica, di W. Stanley Jevons, traduz. del Prof. C. Cantoni, 4ª ediz., di pag. VIII-154, e 15 incisioni . . 1 50
— (Vedi *Estetica — Etica — Filosofia — Psicologia*).
Logica matematica, di C. Burali-Forti, p. VI-158. 1 50
Logismografia, di C. Chiesa, 3ª ediz., pag. XIV-172. 1 50
— (V. *Computist. - Contabilità dello Stato - Ragioneria*).
Luce e colori, del Prof. G. Bellotti, di pag. X-156, con 24 incisioni e 1 tavola. 1 50
Luce e suono, di E. Jones, trad. di U. Fornari. (In lav.)
Macchinista e fuochista, del Prof. G. Gautero, 6ª edizione, con aggiunte dell' Ing. L. Loria, di pagine XIV-180, con 24 incisioni e col testo della Legge sulle caldaie, ecc. (dal 10° al 12° migliaio). . . . . 2 —
Macchinista navale (Manuale del) di M. Lignarolo, di pag. XII-404, con 164 figure 5 50
Macchine agricole, del conte A. Cencelli-Perti, di pag. VIII-216, con 68 incisioni . . . . . 2 —
Macchine da cucire e ricamare, dell'Ing. Alfredo Galassini, di pag. VII-230 con 100 incisioni 2 50
Macchine. (Vedi *Ingegnere civile — Ingegnere navale — Macchinista e fuochista — Macchinista navale — Meccanismi (500) — Meccanica — Orologeria*).
Magnetismo ed elettricità, del Dott. G. Poloni, di pag. XII-204, con 102 incisioni 2 50
Mais. (V. *Agricoltura — Frumento — Panificazione*).
Malattie crittogamiche delle piante erbacee coltivate, del Dottor R. Wolf, traduzione con note ed aggiunte del Dottor P. Baccarini, p. X-268, 50 inc. 2 —
Malattie ed alterazioni dei vini, del Prof. S. Cettolini, di pag. XI-138, con 13 incisioni . . . . . 2 —
Malattie trasmissibili dagli animali all' uomo. (Vedi *Zoonosi*).

L. c.

Mandato commerciale, del Prof. E. VIDARI, p. VI-160 1 50

Mare (Il), del Prof. V. BELLIO, di pag. IV-140, con 6 tavole litografate a colori 1 50

Marino (Manuale del) **militare e mercantile,** di DE AMEZAGA, con 18 xilografie ed un elenco del personale dello Stato maggiore, di pag. VIII-261. . . . 5 —

Mastici. (Vedi *Vernici e lacche*).

Materiali da costruzione (Vedi *Resistenza dei — Travi metallici composti*).

Matematica. (Vedi *Algebra — Aritmetica — Celerimensura — Compensazione — Equazioni — Geometria — Logaritmi — Logica matematica*).

Materia medica moderna (Manuale di), del Dott. G. MALACRIDA. (In lavoro).

Materie coloranti. (Vedi *Colori e Vernici — Tintore — Piante industriali — Vernici e Lacche*).

Meccanica, del Prof. R. STAWELL BALL, traduz. del Prof. J. BENETTI, 3ª edizione, di pag. XVI-214, con 89 incisioni. 1 50

Meccanismi (500), scelti fra i più importanti e recenti riferentisi alla dinamica, idraulica, idrostatica, pneumatica, macchine a vapore, molini, torchi, orologerie ed altre diverse macchine, da H. T. BROWN, traduzione italiana sulla 16ª edizione inglese, dall'Ingegnere F. CERRUTI, p. VI-176, con 500 inc. nel testo 2 50

— (Vedi *Orologeria — Tornitore meccanico*).

Medaglie. (Vedi *Numismatica*).

Medicina. (Vedi *Anatomia — Animali parassiti — — Assistenza agli infermi — Batteriologia — Embriologia — Fisiologia — Farmacista — Igiene — Materia medica — Protistologia — Soccorsi d'urgenza — Terapeutica — Zoonosi*).

Metalli. (Vedi *Peso dei metalli — Operaio — Fonditore — Tempera — Tornitore*).

Metalli preziosi (oro, argento, platino, estrazione, fusione, assaggi, usi), di G. GORINI, 2ª ediz., di pag. 196, con 9 incisioni . . . . . 2 —

— (Vedi *Oreficeria e Gioielleria*).

Metallurgia. (Vedi *Siderurgia*).

Meteorologia generale, del Dott. L. DE MARCHI, di pag. VI-156, con 8 tavole colorate 1 50

— (Vedi *Climatologia — Igroscopi — Sismologia*).

Metrica dei greci e dei romani, di L. MÜLLER, tradotta dal Dott. V. LAMI, di pag. XVIII-130 . . . 1 50

— (Vedi *Letteratura greca — Ritmica — Verbi greci*).

Metrologia. (Vedi *Prototipi internazionali del metro e del kilogramma*).

Micologia. (Vedi *Funghi e Tartufi — Malattie Crittogamiche*).

L. c.

Microscopio (Il), ossia Guida elementare alle più facili osservazioni di Microscopia, del Prof. CAMILLO ACQUA, di pag. XII-226, con 81 incisioni. 1 50
— (Vedi *Batteriologia — Protistologia — Tecnica microscopica*).

Miele. (Vedi *Apicoltura*).

Militaria. (Vedi *Esplodenti — Scherma — Storia arte militare*).

Mineralogia generale, del Prof. L. BOMBICCI, 2ª edizione riveduta, di pag. XIV-190, con 183 incisioni e 3 tavole cromolitografate 1 50

Mineralogia descrittiva, del Prof. L. BOMBICCI, 2ª ediz. di pag. IV-300, con 119 incisioni (vol. doppio). . 3 —
— (Vedi *Cristallografia*).

Miniere. (Vedi *Arte mineraria*).

Miniatura. (Vedi *Colori e vernici — Luce e colori — Decorazione e ornamentazione — Pittura*).

Miti. (Vedi *Errori e pregiudizi*).

Mitilicoltura. (Vedi *Ostricoltura — Piscicoltura*).

Mitologia comparata, di A. DE GUBERNATIS, 2ª ediz., di pag. VIII-150 . . . . . 1 50

Mitologia greca, di FORESTI Vol. I *Divinità*, p. VIII-264 1 50
Vol. II. *Eroi*. 1 50

Mitologia romana, di A. FORESTI. (In lavoro).

Molini (Industria dei), di C. SIBER-MILLOT. (In lavoro).

Momenti resistenti e pesi di travi metalliche composte. Prontuario ad uso degli ingegneri, architetti e costruttori, con 10 figure ed una tabella per la chiodatura. di E. SCHENCK, di pag. XL-188. . . . 3 50
— (Vedi *Peso dei metalli — Resistenza dei materiali*).

Monete. (Vedi *Archeologia — Numismatica — Paleografia — Tecnologia e Terminologia monetaria*).

Morfologia, (Vedi *Embriologia*).

Morfologia greca, del prof. V. BETTEI. (In lavoro).

Morale. (Vedi *Etica — Filosofia morale*).

Musica. (Vedi *Armonia — Cantante — Pianista — Storia della musica — Strumentazione — Strumenti ad arco* ecc.).

Mutuo soccorso. (Vedi *Società di*)

Naturalista viaggiatore, di A. ISSEL e R. GESTRO (Zoologia), di pag. VIII-144, con 38 incisioni . . . . 2 —
— (Vedi *Imbalsamatore — Zoologia*).

Nautica. (Vedi *Attrezzatura — Filonauta — Ingegnere navale — Macchinista navale — Marino*).

Notaro (Manuale del), aggiuntevi le Tasse di registro, di bollo ed ipotecarie, le norme ed i moduli pel Debito pubblico, del Notaio AVV. A. GARETTI, 2ª ediz., rifusa e notevolmente ampliata, di pag. XII-340 . . . . . 3 50
— (Vedi *Giurisprudenza — Testamenti*).

L. c.

Numismatica, del Dott. S. Ambrosoli, di pag. xvi-216, con 100 fotoincisioni nel testo e 4 tavole 1 50
— (Vedi *Araldica — Archeologia — Paleografia*).
Olii vegetali, animali e minerali, loro applicazioni, di G. Gorini, di pag. viii-214, con 7 incis., 2ª ediz., completamente rifatta dal Dott. G. Fabris . . . . 2 —
— (Vedi *Industria stearica — Olivo ed olio — Saponi*).
Olivo ed olio, *Coltivazione dell'olivo, estrazione, purificazione e conservazione dell'olio,* del Prof. A. Aloi, 3ª ediz., di pag. xii-330, con 41 incisioni . . . . . 3 —
Omero, di W. Gladstone, traduz. di R. Palumbo e C. Fiorilli, di pag. xii-196 . . . . . 1 50
Operaio (Manuale dell'). Raccolta di cognizioni utili ed indispensabili agli operai tornitori, fabbri, calderai, fonditori di metalli, bronzisti, aggiustatori e meccanici, di G. Belluomini, 3ª edizione, di pag. xvi-216. 2 —
— (V. *Falegname - Fonditore - Paga operai - Tornitore*).
Operazioni doganali. (Vedi *Codice doganale — Trasporti*).
Opifici. (Vedi *Proprietario di Case*).
Ordinamento degli Stati liberi d'Europa, del Dott. F. Racioppi, di pag. viii-310 (vol. doppio) . . 3 —
Ordinamento degli Stati liberi fuori d'Europa, del Dott. F. Racioppi, di pag. viii-376 (vol. doppio). 3 —
Oreficeria e gioielleria, oro, argento e platino, di E. Boselli, di pag. 336, con 125 incisioni. . . . . 4 —
— (Vedi *Metalli preziosi — Pietre preziose*).
Oriente antico (L'), di I. Gentile. (V. *Storia antica*).
Ornamentazione. (Vedi *Colori — Decorazioni — Disegno — Pittura — Scoltura*).
Orografia. (Vedi *Alpi — Dizionario Alpino — Prealpi Bergamasche*).
Orologeria moderna, dell'Ing. Garuffa, con 187 illustrazioni, di pag. viii-302, con 276 incisioni . . . 5 —
Orticoltura, del Prof. D. Tamaro, con 60 incisioni. 4 —
— (Vedi *Agricoltura*).
Ostricoltura e mitilicoltura, del Dott. D. Carazzi, con 13 fototipie, di pag. viii-202 . . . . . 2 50
Ottica, di E. Gelcich, con molte illustrazioni (In lav.).
Ovicoltura. (Vedi *Alimentazione — Bestiame*).
Paga giornaliera (Prontuario della), **da cinquanta centesimi a lire cinque,** di C. Negrin, di pag. 222. 2 50
Paleoetnologia, di I. Regazzoni, p. xi-252, con 10 inc. 1 50
Paleografia, di E. M. Thompson, traduz. dall'inglese, con aggiunte e note di G. Fumagalli, di pag. viii-156, con 21 incisioni nel testo e 2 tavole in fototipia . . 2 —
Panfilamento. (Vedi *Filonauta*).
Panificazione razionale, di Pompilio, di pag. iv-126. 2 —
Parafulmini. (Vedi *Elettricità — Fulmini*).

L. c.

Parassitologia. (Vedi *Animali parassiti*).
Pedagogia. (Vedi *Didattica — Giardino infantile — Ginnastica femminile e maschile — Igiene scolastica*).
Pelli. (Vedi *Concia delle pelli*).
Pensioni. (Vedi *Società di Mutuo soccorso*).
Peso dei metalli, ferri quadrati, rettangolari, cilindrici, a squadra, a U, a Y, a Z, a T e a doppio T, e delle lamiere e tubi di tutti i metalli, di G. Belluomini, di pag. xxiv-248 . . . 3 50
— (V. *Fonditore — Ingegnere civile — Ingegnere navale — Momenti resistenti — Operaio — Resistenza*).
Pianista (Manuale del), di L. Mastrigli, di p. xvi-112. 2 —
Piante e fiori sulle finestre, sulle terrazze e nei cortili. Coltura e descrizione delle principali specie e varietà, di A. Pucci, di pag. viii-198 con 116 incisioni. 2 50
— (Vedi *Botanica — Floricoltura — Frutticoltura*).
Piante industriali, coltivazione, raccolto e preparazione, di G. Gorini, nuova edizione, di pag. ii-144. 2 —
Piante tessili. (Vedi *Coltivazione ed industrie delle — Gelsicoltura*).
Piccole industrie, del Prof. A. Errera, di p. xvi-186. 2 —
Pietre preziose, classificazione, valore, arte del gioielliere, di G. Gorini, 2ª ed., di pag. 138, con 12 inc. 2 —
— (Vedi *Metalli preziosi — Oreficeria — Giojelleria*).
Pirotecnica moderna, di F. Di Maio, con 111 incisioni, di pag. viii-150. . . . . 2 50
Piscicoltura, del Dott. E. Bettoni. (In lavoro).
— (Vedi *Ostricoltura e Mitilicoltura*).
Pittura. Pittura italiana antica e moderna, del Prof. A. Melani, 2 vol., di pag. xx-164 e xxvi-202, illustrati con 102 tav., di cui una cromolit. e 11 figure nel testo. 6 —
— (Vedi *Anatomia pittorica — Colori (scienza dei) — Colori e vernici — Decorazione — Luce e colori*).
Poesia. (Vedi *Arte del Dire — Dantologia — Letteratura — Omero — Rettorica — Ritmica — Shakspeare — Stilistica*).
Pollicoltura, del March. G. Trevisani, con 70 illustrazioni, di pag. xvi-176 . . . . . 2 50
— (Vedi *Animali da cortile — Colombi*).
Pomologia artificiale, secondo il sistema Garnier-Valletti, del Prof. M. Del Lupo, p. vi-132, con 44 inc. 2 —
— (Vedi *Frutticoltura — Orticoltura*).
Prato (Il), del Prof. G. Cantoni, di pag. 146, con 13 inc. 2 —
Prealpi bergamasche (Guida-itinerario alle), compresi i passi alla Valtellina, con prefazione di Stoppani, 2ª ediz., di pag. xx-124, con carta topografica e panorama delle Alpi Orobiche . . . . . 3 —
— (Vedi *Alpi — Dizionario alpino — Geografia*).
Pregiudizi. (Vedi *Errori e pregiudizi — Mitologia*).

L. c.

Prontuario di geografia e statistica, di G. Garollo, pag. 62 . . . . . 1 —
— (Vedi *Atlante Universale — Atlante d'Italia — Dizionario geografico — Geografia*).
Prontuario per le paghe. (Vedi *Paghe*).
Proprietario di case e di opifici (Manuale del), Imposta sui fabbricati dell'Avv. Giordani, pag. xx-264. 1 50
Protistologia, di L. Maggi, 2ª ediz., di pag. xvi-278, con 93 incisioni nel testo (volume doppio) . . . . . 3 —
— (Vedi *Animali parassiti — Batteriologia — Microscopio*).
Prototipi (I) internazionali del metro e del kilogramma ed il codice metrico internazionale, di A. Tacchini. (In lav.)
Proverbi in quattro lingue. (V. *Dottrina popolare*).
Psicologia, del Prof. C. Cantoni, di pag. iv-158 . . 1 50
Psicologia fisiologica, di G. Mantovani. (In lav.).
Raccoglitore di francobolli. (Vedi *Dizionario filatelico*).
Ragioneria, del Prof. V. Gitti, 2ª ediz., di pag. vi-132. 1 50
— (V. *Computisteria — Contabilità — Logismografia*).
Reclami ferroviari. (Vedi *Trasporti*).
Regolo calcolatore e sue applicazioni nelle operazioni topografiche, dell'Ing. G. Pozzi, di pag. xv-233 con 182 incisioni e 1 tavola 2 50
Religione e lingue dell'India inglese, di R. Cust, trad. dal Prof. A. De Gubernatis, di pag. iv-124 . 1 50
— (Vedi *Letteratura indiana*).
Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni, dell'Ing. Gallizia, pag. x-336, 236 incisioni e 2 tavole. 5 50
— (Vedi *Peso dei metalli — Travi metallici*).
Rettorica, ad uso delle Scuole, di F. Capello, p. vi-122. 1 50
— (Vedi *Arte del dire — Ritmica — Stilistica*).
Ricamo. (Vedi *Macchine da cucire*).
Ricchezza mobile (Imposta sui redditi di), dell'Avvocato E. Bruni, di pag. viii-218 . . . . . 1 50
Ricettario fotografico, Dott. Luigi Sassi, di p. vi-150 2 —
Rimedi. (Vedi *Terapeutica*).
Riscaldamento e ventilazione degli ambienti abitati, del Prof. R. Ferrini, 2 vol., di pag. x-332, 94 incis. 4 —
Riscossione d'imposte. (Vedi *Imposte dirette*).
Risorgimento italiano (Storia del), del Prof. F. Bertolini, di pag. vi-154 . . . . . 1 50
— (Vedi *Storia e cronologia — Storia italiana*).
Ristauratore dei dipinti, del Conte G. Secco-Suardo, 2 vol., di pag. xvi-249, xii-362 con 47 incisioni . . . 6 —
Ritmica e metrica razionale italiana, del Professore Rocco Murari, di pag. xvi-216. . . . . 1 50
— (Vedi *Arte del dire — Rettorica — Stilistica*).

L. c.

Rivoluzione (La) **francese** (1789-1790), del Prof. Dott. GIAN PAOLO SOLERIO, di pag. IV-176 . . . . . 1 50

Sanscrito (Avviamento allo studio del), di F. G. FUMI, 2ª ediz., rifatta, di pag. XII-254 (vol. doppio) . . . . 3 —

Saponeria, dell'Ing. E. MARAZZA. (In lavoro).

Scacchi (Manuale pel giuoco degli), di A. SEGHIERI, di pag. XV-222, con 191 illustrazioni 2 50

Scherma italiana (Manuale di), su i principii ideati da Ferdinando Masiello, di J. GELLI, di pag. VIII-194, con 66 tavole. 2 50

Scienza delle finanze, di T. CARNEVALI, pag. IV-140. 1 50

Scienze naturali. (Vedi *Anatomia comparata — Animali parassiti — Antropologia — Arte mineraria — Batteriologia — Bestiame — Botanica — Chimica — Coleotteri — Chimica agraria — Concimi — Cristallografia — Fisiologia — Flora italiana — Funghi e Tartufi — Gelsicoltura — Geologia — Imbalsamatore — Insetti — Lepidotteri — Microscopio — Mineralogia — Naturalista — Ostricoltura — Piante e Fiori — Piscicoltura — Pomologia — Protistologia — Selvicoltura — Zoologia*).

Scoltura. Scoltura italiana antica e moderna, statuaria e ornamentale dell' Archit. Prof. A. MELANI, di pagine XVIII-196, con 56 tav. e 26 fig. intercalate nel testo. 4 —

Scoltura in legno. (Vedi *Decorazione e industrie artistiche — Falegname*).

Scritture d' affari (Precetti ed esempi di), per uso delle Scuole tecniche, popolari e commerciali, del Professor D. MAFFIOLI, di pag. VIII-203. . . . . 1 50

Selvicoltura, di A. SANTILLI, pag. VIII-220 e 46 inc. 2

Sericoltura. (Vedi *Bachi da seta — Gelsicoltura — Industria della seta — Tintura della seta*).

Shakspeare, di DOWDEN, trad. di BALZANI. (In lav.). 1 50

Siderurgia (Manuale di), dell'Ing. V. ZOPPETTI, pubblicato e completato per cura dell' Ing. E. GARUFFA, di pag. IV-368, con 220 incisioni. 5 50

— (Vedi *Metalli — Tempera*).

Sismologia, del Capitano L. GATTA, di pag. VIII-175, con 16 incisioni e 1 carta 1 50

Soccorsi d' urgenza, del Dott. C. CALLIANO, di pagine XLI-299, con 6 tavole litografate, 3ª edizione . . 3

Società di Mutuo soccorso (Manuale Tecnico per le). Norme per l'assicurazione delle pensioni e dei sussidi per malattia e per morte del dott. G. GARDENGHI (in lav.).

Spettroscopio (Lo) **e le sue applicazioni,** di R. A. PROCTOR, traduz. con note ed aggiunte di F. PORRO, di pag. VI-178, con 71 incisioni e una carta di spettri. 1 50

Spirito di vino. (Vedi *Alcool — Cognac*).

L. c.

Sport. (Vedi *Alpi — Cacciatore — Ciclista — Dizionario Alpino — Ginnastica — Scacchi — Scherma*).
Statica (Principî di) **e loro applicazione alla teoria e costruzione degli strumenti metrici,** per l'Ing. E. BAGNOLI. di pag. VIII-252 con 192 incisioni . . . 3 50
Statistica, di F. VIRGILII, di pag. VIII-176 . . . . 1 50
Stearineria. (Vedi *Industria stearica*).
Stemmi. (Vedi *Araldica*).
Stenografia, di G. GIORGETTI e M. TESSAROLI (secondo il sistema Gabelsberger-Noe), di pag. 200. . . 2 —
Stilistica, del Prof. F. CAPELLO. di pag. XII-164. . . 1 50
— (Vedi *Arte del dire — Rettorica — Ritmica*.
Storia antica (Elementi di). Vol. I. *L'Oriente Antico,* prospetto storico, di I. GENTILE, di pag. XII-232 . . 1 50
Vol. II. *La Grecia,* di G. TONIAZZO, di pag. VI-216. 1 50
Storia e cronologia medioevale e moderna, in CC tav. sinottiche, di V. CASAGRANDI, di pag. XVIII-204. 1 50
Storia dell'arte militare antica e moderna, di V. ROSSETTO, con 17 tavole illustrative, di pag. VIII-504. 5 50
Storia della ginnastica. (V. *Ginnastica - Scherma*).
Storia italiana (Manuale di), di C. CANTÙ, di p. IV-160. 1 50
— (Vedi *Risorgimento — Storia e cronologia*).
Storia della musica, del Dott. A. UNTERSTEINER, di pag. 300 (vol. doppio). . . . . 3 —
Storia naturale. (Vedi *Scienze naturali*).
Strategia. (Vedi *Storia dell'arte militare*).
Strumentazione (Manuale di), di E. PROUT, trad. ital. con note di V. RICCI, con 95 esempi, di pag. X-222. 2 50
— (Vedi *Armonia — Cantante — Pianista*).
Strumenti ad arco (Gli) **e la musica da camera,** del Duca di CAFFARELLI F., di pag. X-235 . . . . 2 50
Strumenti metrici. (Vedi *Statica*).
Suono (Vedi *Luce e suono*).
Sussidi. (Vedi *Società Mutuo soccorso*).
Tabacco, del Prof. G. CANTONI, di p. IV-176, con 6 inc. 2 —
Tacheometria. (Vedi *Celerimensura*).
Taglio e confezione di biancheria. (V. *Disegno*).
Tariffe ferroviarie. (V. *Codice doganale - Trasporti*).
Tartufi e funghi. (Vedi *Funghi*).
Tasse di registro, bollo, ecc. (Vedi *Notaro*).
Tassidermista. (Vedi *Imbalsamatore — Naturalista viaggiatore*).
Tavole logaritmiche. (Vedi *Logaritmi*).
Tavole tacheometriche. (Vedi *Celerimensura*).
Tecnica di anatomia microscopica, del Prof. D. CARAZZI. di pag. XI-211 con 5 incisioni. 1 50
Tecnologia e terminologia monetaria, di G. SACCHETTI, di pag. XIV-192 . . . . . 2 —

L. c.

Telefono. di D. V. Piccoli, di pag. IV-120, con 38 inc. 2 —
Telegrafia, di R. Ferrini, di pag. VI-318, con 95 inc. 2 —
Telegrafia marittima. (Vedi *Attrezzatura*).
Telemetria, misura delle distanze in guerra, di G. Bertelli, di pag. XIII-145, con 12 zincotipie . 2 —
— (Vedi *Cartografia — Celerimensura — Compensazioni errori — Disegno topografico*).
Tempera e cementazione, dell'Ing. Fadda, di pagine VIII-108, con 20 incisioni . . . . . 2 —
Terapeutica (Manuale di) l'impiego ipodermico e la dosatura dei rimedî del Dott. G. Malacrida. (In lav.)
Termodinamica, di C. Cattaneo, p. X-196, con 4 fig. 1 50
Terremoti. (Vedi *Sismologia — Vulcanismo*).
Tessitura. (Vedi *Filatura*).
Testamenti (Manuale dei), per cura del Dott. L. Serina, di pag. VI-238 . . . . . 2 50
Tigrè-italiano (Manuale), con due dizionarietti italiano-tigrè e tigrè-italiano ed una cartina dimostrativa degli idiomi parlati in Eritrea, del Cap. Manfredo Camperio, di pag. 180 . . . . . 2 50
— (V. *Arabo volgare — Grammatica Galla — Lingue dell'Africa*).
Tintore (Manuale del), di R. Lepetit, 3ª ediz., di pagine X-279, con 14 incisioni (vol. doppio) . . . . . 4 —
Tintura della seta, studio chimico tecnico, di T. Pascal, di pag. XVI-432 . . . . . 5 —
Tipografia. I. — Guida per chi stampa e fa stampare. — Compositori e Correttori, Revisori, Autori ed Editori, di S. Landi, di pag. 280 . . . . . 2 50
Topografia. (Vedi *Cartografia — Celerimensura — Compensazione errori — Disegno topografico — Regolo calcolatore — Telemetria*).
Topografia di Roma antica, di L. Borsari, con illustrazioni. (In lavoro).
Tornitore meccanico (Guida pratica del), ovvero sistema unico per calcoli in generale sulla costruzione di viti e ruote dentate, arricchita di oltre 100 problemi risolti, di S. Dinaro, di pag. 164. . . . . 2 —
— (Vedi *Meccanica — Meccanismi — Operaio*).
Trasporti, tariffe, reclami ferroviari ed operazioni doganali. Manuale pratico ad uso dei commercianti e privati, colle norme per l'interpretazione delle tariffe e disposizioni vigenti, per A. G. Bianchi, con una carta delle reti ferroviarie italiane, di pagine XVI-152 . . . . . 2 —
Travi metalliel composti (Momenti resistenti, pesi dei), di E. Schenck, pagine XL-188, 10 figure e tabella per chiodatura 3 50
— (Vedi *Peso dei metalli — Resistenza dei materiali*).

L. c.

Triangolazioni topografiche e triangolazioni catastali, dell'Ing. O. JACOANGELI. (In lavoro).

Trigonometria. (Vedi *Geometria metrica*).

Unità assolute. Definizione, Dimensioni, Rappresentazione, Problemi, dell'Ing. G. BERTOLINI, di p. X-124-44. 2 50

Uva passa (Industria dell') **e della essicazione delle frutta e degli ortaggi.** Prof. L. PAPARELLI. (In lav).

Valli Lombarde, di SCOLARO. (Vedi *Dizion. alpino*).

Valori pubblici (Manuale per l'apprezzamento dei) e per le operazioni di Borsa, Dott. F. PICCINELLI, di pag. XIV-236 . . . . . 2 50

Velocipedismo, di A. GALANTE. (Vedi *Ciclista*).

Ventilazione. (Vedi *Riscaldamento*).

Verbi greci anomali (I), di P. SPAGNOTTI, secondo le Grammatiche di CURTIUS e INAMA, di pag. XXIV-107. 1 50

Vernici, lacche, mastici, inchiostri da stampa, ceralacche e prodotti affini (Fabbricazione delle), dell'Ing. UGO FORNARI, di pag. VIII-262 . . . . . 2 —

— (Vedi *Colori e Vernici*).

Veterinaria. (Vedi *Bestiame — Cavallo — Igiene veterinaria — Zoonosi*).

Viaggi. (Vedi *Ciclista — Cristoforo Colombo — Naturalista viaggiatore*).

Vinacce (Fabbricazione delle). (Vedi *Cognac*).

Vino (Il), di GRAZZI-SONCINI, di pag. XVI-152 . . . . . 2 —

Viticoltura. Precetti ad uso dei Viticoltori italiani, del Prof. O. OTTAVI, rived. ed ampliata da A. STRUCCHI, 3ª ediz., di pag. VIII-184 e 22 incisioni . . . . . 2 —

— (Vedi *Analisi del vino — Cantiniere — Enologia — Enologia domestica — Malattie dei vini — Uva passa — Vino*).

Vocabolario (Nuovo) **della lingua italiana,** di A. STRACCALI e L. GENTILE. Volume di circa 1400 pagine. (In lavoro).

Volapük (Dizionario italiano-volapük), preceduto dalle Nozioni compendiose di grammatica della lingua, del Prof. C. MATTEI, secondo i principii dell'inventore M. SCHLEYER, ed a norma del *Dizionario Volapük* ad uso dei francesi, del Prof. A. KERCKHOFFS, di pag. XXX-198. 2 50

— (Dizionario volapük-italiano), del Prof. C. MATTEI, di pag. XX-204 . . . . . 2 50

— Manuale di conversazione e raccolta di vocaboli e dialoghi italiani-volapük, per cura di M. ROSA TOMMASI e A. ZAMBELLI, di pag. 152 . . . . . 2 50

Volumetria. (Vedi *Analisi volumetrica*).

Vulcanismo, del Capitano L. GATTA, di pag. VIII-268, con 28 incisioni 1 50

— (Vedi *Climatologia — Igroscopi — Meteorologia — Sismologia*).

L. c.

Zincotipia. (Vedi *Arti grafiche*).

Zoologia, Proff. E. H. Giglioli e G. Cavanna, 3 vol.:
I. Invertebrati, di pag. 200, con 45 figure . . . 1 50
II. Vertebrati. Parte I, Generalità, Ittiopsidi (Pesci ed Anfibi), di pag. xvi-156, con 33 incisioni. . 1 50
III. Vertebrati. Parte II, Sauropsidi, Teriopsidi (Rettili, Uccelli e Mammiferi), p. xvi-200 con 22 inc. 1 50
— (Vedi *Animali parassiti — Batteriologia — Coleotteri italiani — Imbalsamatore — Insetti — Lepidotteri — Naturalista viaggiatore — Protistologia*).

Zoonosi, del Dott. B. Galli Valerio, di pag. xv-227 1 50
— (Vedi *Igiene veterinaria*).

Zootecnia, del Prof. Tampelini. (In lavoro).

INDICE ALFABETICO DEGLI AUTORI.

Acqua C. Microscopio. . . *pag.* 19
Adler G. Esercizi di lingua tedesca 11
Aducco A. Chimica agraria . . 6
Airy G. B. Gravitazione 14
Alberti F. Il bestiame e l'agricoltura. 5
Albicini. Diritto civile. 8
Albini G. Fisiologia 11
Alessandri P. E. Analisi volumetrica 3
— Infezione, Disinfezione . . 15
— Farmacista (Manuale del). 11
Allori A. Dizionario eritreo . . 9
Aloi. Olivo ed Olio 20
Ambrosoli. Numismatica 20
— Letteratura islandese . . . 16
Amezaga. Manuale del Marino 18
Antilli A. Disegno geometrico. 9
Arlia C. Dizion. Bibliografico. 9
Arti grafiche, ecc. 4
Aschieri F. Geometria projettiva dello spazio 13
— Geometria projettiva del piano e della stella 13
— Geometria descrittiva . . . 13
— Geometria analit. d. piano 13
— Geometria analit. d. spazio 13
Azzoni. Debito pubblico italiano 8
Baccarini P. Malattie crittog. 17
Bagnoli. Statica. 24
Balfour-Stewart. Fisica 11
Bali J. Alpi (Le) 2
Ball R. Stawell. Meccanica . . 18
Balzani A. Shakspeare 23
Barpi U. Igiene veterinaria. . 14
Barth M. Analisi del vino . . . 3
Bellio V. Mare (Il) 18
— Cristoforo Colombo. 8
Bellotti G. Luce e colori. . . . 17
Belluomini G. Cubatura legnami 8
— Peso dei metalli. 21
— Falegname ed ebanista . . 11
— Manuale dell'Operaio . . . 20
— Fonditore 12
Benetti J. Meccanica 18
Bertelli G. Disegno topografico 9
Bertelli G. Telemetria 25
Bettei V. Morfologia greca . 19
Bertolini F. Storia del risorgimento italiano. 22
Bertolini G. Unità assolute . . . 26
Besta R. Anatomia e fisiologia comparata 3
Bettoni. Piscicoltura . . . *pag.* 21
Biagi G. Bibliotecario (Manuale del) 5
Bianchi A. G. Trasporti, tariffe, reclami, oper. dogan. . . . 25
Bignami-Sormani. Diz. Alpino . . 9
Bock. Igiene privata 14
Boito C. Disegno (Princ. del). 9
Bombicci L. Mineral. generale 19
— Miner. descrittiva 19
Bonacina. Fotografia d. colori 12
Bonetti E. Disegno, taglio e confezione di biancheria. . 9
Bonizzi P. Anim. da cort. . . . 8
— Colombi domestici 7
Borletti F. Celerimensura . . . 6
Borsari L. Roma antica. 25
Boselli E. Gioiell. e Orefic. 13-20
Brigiuti R. Letterat. egiziana. 16
Brown. 500 Meccanismi. 18
Bruni F. Tartufi e funghi. 12-24
Bruni E. Imposte dirette. . . . 15
— Contabilità dello Stato . . 8
— Catasto italiano 6
— Codice doganale. 6
— Legislazione rurale. 6
— Ricchezza mobile 22
Burali-Forti. Logica matematica 17
Cailiano C. Soccorsi d'urgenza 23
— Assistenza infermi 4
Camperio M. Manuale Tigrè-Italiano 25
Canestrini E. Fulm. e parafulm. 12
Canestrini G. Apicoltura 3
— Antropologia 3
Canestrini G. e R. Batteriologia 5
Cantamessa F. Alcool (Industria e fabbricazione dell'). 2
Cantoni C. Logica 17
— Psicologia 22
Cantoni G. Fisica. 11
— Tabacco (Il) 24
— Prato (Il) 21
— Frumento e Mais 12
Cantoni P. Igroscopi, Igrometri, Umidità atmosferica . . 14
Cantù C. Storia italiana 24
Capello F. Rettorica. 22
— Stilistica. 24
Cappelletti L. Letterat. spagn. e portoghese. 16
Carazzi D. Ostricoltura 20
— Tecnica microscopica . . . 24
Carega di Muricce F. Agronomia 2
— Estimo rurale 11

Carnevali. Scienza di finanze. 23
Carraroli A. Igiene rurale . . . 14
Casagrandi V. Storia e cronologia 24
Cattaneo C. Dinamica element. 8
— Termodinamica 25
Cattaneo G. Embriologia e morfologia 10
Cavanna G. Zoologia 27
Cencelli-Perti A. Macchine agr. 17
Cettolini S. Malattie dei vini. 17
Chiesa C. Logismografia . . . 17
Ciampoli D. Letterature slave 16
Cignoni A. Ing. navale (Prontuario dell') 15
Cinquini A. Fonologia greca . 12
Colombo G. Ingegnere civile (Manuale dell') 15
— Elettricista (Manuale dell') 10
Comboni E. Analisi del vino . 3
Concari T. Grammatica ital. . 14
Consoli S. Fonologia latina . 12
— Letteratura Norvegiana e Danese 16
Conti. Giardino infantile . . . 18
Contuzzi F. P. Diritto costituzionale 9
— Diritto internaz. privato . 9
— Diritto internaz. pubblico 9
Cossa L. Economia politica . 10
Cremona I. Alpi (Le) 2
Crotti F. Compensazione degli errori 7
Cust R. Religione e lingue dell'India inglese. 22
— Lingue d'Africa. 17
Dal Piaz di Prato. Cognac, Vinacce, ecc. 7
Damiani. Lingue straniere . . 17
De Amezaga. Marino militare e mercantile. 18
De Brun A. Contabilità comunale. 7
De Gubernatis A. Mitologia comparata 19
— Letteratura indiana 16
— Religione e lingue dell'India inglese. 22
— Lingue d'Africa 17
Del Lupo P. Pomologia artific. 21
De Marchi L. Meteorologia . . 18
— Climatologia 6
De Sterlich. Arabo volgare . . 3
Dib Khaddag. Arabo volgare . 3
Di Caffarelli F. Strum. ad arco 24
Di Maio F. Pirotecnica. 21
Dinaro S. Tornitore meccanico 25
Dizionari. 9-10
Dowden. Shakspeare 23
Enciclopedia Universale 10
Erede G. Geometria pratica . 13
Errera A. Piccole industrie. . 21
Fadda. Tempera e cementazione. 25
Faralli G. Igiene pubblica. . . 14
Fenini C. Letteratura ital. . . . 16
Ferrari D. Arte (L') del dire. . . 4
Ferrini C. Diritto romano . . . 9
Ferrini C. Il Digesto 8
Ferrini R. Elettricità 10
— Elettricista (Manuale dell') 10
— Energia fisica. 10
— Galvanoplastica. 12
— Riscaldamento e ventilaz. 22
— Telegrafia. 24
Fiorilli C. Omero. 20
Foresti A. Mitologia greca. Vol. I Divinità e vol. II Eroi 19
— Mitologia romana. 19
Fornari U. Vernici e lacche. . 26
Foster M. Fisiologia 11
Franceschi G. Cacciatore . . . 5
Franceschini F. Insetti utili . . 15
— Insetti nocivi 15
Friso. Filosofia morale. 11
— Etica 11
Fumagalli G. Paleografia. . . . 20
— Bibliotecario 5
Fumi F. G. Sanscrito. 23
Funaro A. Concimi (I) 7
Gabba L. Chimico (Man. del). 6
— Seta (Industria della) . . . 15
— Adulterazione e falsificazione degli alimenti. 2
Gabelsberger. Stenografia . . . 24
Gagliardi E. Interesse e sconto 15
Galante A. Ciclista. 6
Galassini A. Macchine da cucire e da ricamare. 17
Galletti E. Geografia 12
Galli-Valerio B. Zoonosi 27
Gallizia. Resistenza di mater. 22
Gardenghi G. Società di Mutuo Soccorso 23
Garetti A. Notaro (Manuale del) 19
Garnier-Valletti. Pomologia . . 21
Garollo G. Atlante geografico universale 4
— Atlante geografico-storico dell'Italia. 4
— Dizionario geografico . . . 9
— Prontuario di geografia. . 22

Garuffa E. Orologeria . . *pag.* 20
— Siderurgia. 23
Gatta L. Sismologia. 23
Gatta L. Vulcanismo 26
Gautero G. Macchinista e fuoch. 17
Geikie A. Geografia fisica . . . 13
— Geologia. 13
Geicich E. Cartografia 6
— Ottica. 20
Gelli J. Dizionario filatelico . 9
— Ginnastica 13
— Scherma. 23
Gentile I. Archeologia dell'arte 3
— Geografia classica 12
— Storia antica. 24
Gentile L. Vocabolario italiano 26
Gestro R. Naturalista viaggiat. 19
— Imbalsamatore. 14
Gian Paolo Solerio. Rivoluzione (La) francese 23
Giglioli E. H. Zoologia 27
Gioppi L. Dizionario fotograf. 9
Giordani. Proprietario di case (Manuale del) 22
Giorgetti G. Stenografia 24
Gitti V. Computisteria 7
— Ragioneria 22
Gladstone W. E. Omero 20
Gorini G. Colori e vernici . . . 7
— Concia di pelli. 7
— Conserve alimentari 7
— Metalli preziosi 18
— Olii 20
— Piante industriali 21
— Pietre preziose. 21
Gorra E. Lingue neo-latine . . 17
Grazzi-Soncini. Vino (Il). 26
Griffini A. Coleotteri italiani . 7
— Lepidotteri italiani. 16
Grothe E. Filatura, tessitura . 11
Grove G. Geografia 12
Guaita L. Colori e pittura. . . 7
Hoepli U. Enciclopedia 10
Hooker I. D. Botanica 5
Hugues L. Esercizi geografici 10
Imperato F. Attrezzatura navi 5
Inama V. Letterat. greca. . . . 16
— Grammatica greca 14
— Filologia classica. 11
Issel A. Naturalista viaggiat. 19
Jacoangeli O. Triangolazioni topografiche e catastali. . . 26
Jenkin F. Elettricità. 10
Jevons W. Stanley. Econ. politica. 10
— Logica 17
Jones E. Calore (Il). . . . *pag.* 6
— Luce e suono 17
Kiepert R. Atlante geogr. univ. 4
— Esercizi geografici 10
Kopp W. Antich. priv. dei Rom. 3
Kröhnke G. H. A. Curve (Tracciamento delle) 8
Lami V. Metrica dei Greci e dei Romani. 18
Landi S. Tipografia 25
Lange O. Letteratura tedesca 16
Lepetit R. Tintore 25
Lignarolo. Macchinista navale 17
Lockyer I. N. Astronomia . . . 4
Lombardini A. Anatomia pitt. 3
Lombroso C. Grafologia 13
Loria L. Curve (Tracc. delle) . . 8
— Macchinista e fuochista. . 17
Loris. Diritto amministr. . . . 8
Lovera R. Grammatica greca moderna 14
— Grammatica rumena. . . . 14
Maffioli D. Diritti e doveri . . 8
— Scritture d'affari 23
Maggi L. Protistologia. 22
Malacrida G. Materia medica. 18
— Terapeutica. 25
Malfatti B. Etnografia. 11
Manetti L. Caseificio. 6
Mantovani G. Psicologia fisiologica 22
Marazza E. Corpi grassi. . . . 8
— Industria stearica. 15
— Saponeria 23
Marcei. Lingue straniere . . . 17
Marcillac F. Letteratura franc. 16
Marcillac P. Ingegnere civile. 15
Mastrigli L. Cantante 6
— Pianista 21
Mattei C. Volapük (Dizion.). . 26
Mazzoccolo. Legge (La nuova) comunale e prov. annotata 15
Melani A. Scoltura italiana . . 23
— Architettura italiana . . . 3
— Pittura italiana 21
— Decoraz. e ind. artistiche 8
Mercanti F. Animali parassiti 3
Molina R. Esplodenti e il modo di fabbricarli 11
Moreschi N. Antichità private dei Romani. 3
Muffone G. Fotografia. 12
Müller L. Metrica dei Greci e dei Romani. 18
Müller O. Logaritmi. 17
Murari R. Ritmica 22

Negrin C. Prontuario per le paghe. . . . . *pag* 20-22
Nenci T. Bachi da seta. 5
Niccoli V. Economia dei fabbricati rurali. 10
Olivari G. Filonauta. 11
Olmo C. Diritto ecclesiastico. 9
Orlandi G. Celerimensura . . . 6
Ottavi O. Enologia. 10
— Viticoltura. 26
Ottino G. Bibliografia. 5
Pagani C. Assicuraz. sulla vita 4
Paganini A. Letteratura franc. 16
— Letteratura tedesca. 16
Palumbo R. Omero. 20
Panizza. Aritmetica razionale 4
— Aritmetica pratica 4
Paoloni. Disegno assonomet. 9
Paparelli S. Uva passa e frutta 26
Parietti E. Igiene privata . . . 14
Pascal. Tintura seta 25
Pascal E. Calcolo differenziale. 5
— Calcolo integrale 5
Pavesi A. Chimica 6
Pavia L. Grammatica tedesca 14
— Grammatica inglese 14
— Grammatica spagnuola . . 14
Pedicino N. A. Botanica 5
Percossi R. Calligrafia 5
Petri L. Computisteria agraria 7
Petzholdt. Bibliot. (Man. del) . . 5
Piazzoli E. Illumin. elettrica . 14
Piccinelli F. Valori pubblici . . 26
Piccoli D. V. Telefono. 25
Pilo M. Estetica 11
Pincherle S. Algebra elem. . . 2
— Algebra complementare. I. 2
— Analisi algebrica 8
— Equazioni 2-10
— Geometria metrica e trigonometria. 13
— Geomet. pura. 18
Pirotta R. Flora italiana. . . . 12
Pizzi I. Letteratura persiana. 16
Poggi T. Alimentazione del bestiame 2
Poloni G. Magnetismo ed elet. 17
Pompilio. Panificazione. 20
Porro F. Spettroscopio. 23
— Gravitazione di Airy. . . . 14
Pozzi G. Regolo calcolatore e sue applicazioni 22
Prat. G. Grammatica francese. 14
— Esercizi di traduzione . . 10
Proctor R. A. Spettroscopio. . 23
Prout E. Strumentazione. . . . 24
Pucci A. Piante e fiori . . *pag.* 21
Racioppi F. Ordinamento degli Stati liberi d'Europa 20
— degli Stati fuori d'Europa 20
Ramorino F. Letterat. romana 16
Regazzoni I. Paleoetnologia . . 20
Repossi A. Igiene scolastica . 14
Restori. Letteratura provenz. 16
Revel A. Letteratura ebraica. 16
Ricci V. Strumentazione. . . . 24
Righetti E. Asfalto. 4
Rocco-Murari. Ritmica ital. . . 22
Roda Fill. Floricoltura 12
Roscoe H. E. Chimica 6
Rossetto V. Storia Arte militare. 24
Sacchetti G. Tecnologia, terminologia monetaria 24
Sanarelli. Igiene del lavoro . . 14
Sansoni F. Cristallografia . . . 8
Santilli. Selvicoltura. 23
Sartori G. Latte, cacio, burro. 15
— Caseificio. 6
Sassi L. Ricettario fotografico 22
Savorgnan d'Osoppo A. Coltiv. e indust. delle piante tessili. 7
Scartazzini G. A. Dantologia. . 8
Schenck. Travi metallici. . 19-25
Schiaparelli G. V. Astronomia. 4
Scolari. Valli lombarde. 26
Secco-Suardo. Ristauratore dei dipinti 22
Seghieri. Scacchi. 23
Sergent E. Astronomia 4
Serina L. Testamenti 25
Sernagiotto R. Enologia domestica 10
Sessa. Dottrina popolare . . . 10
Siber-Millot C. Molini (Ind. dei) 19
Solazzi E. Letter. inglese . . . 16
Soli G. Didattica 8
Sormani. Igiene pubblica. . . . 14
Spagnotti P. Verbi greci 26
Spataro D. Fognatura cittadina 12
Stoppani A. Geogr. fisica . . . 13
— Geologia. 13
— Prealpi bergamasche. . . . 21
Stoppato A. Diritto penale. . . 9
Stoppato L. Fonologia italiana 12
Straccali A. Vocabolario italiano 26
Strafforello G. Alimentazione. 2
— Errori e pregiudizi 10
— Lett. amer. 16
Strucchi A. Cantiniere 6
— Enologia. 10